Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, Конечность дискретного спектра при нетривиальных значениях полного квазиимпульса в системе трех бозонов на решетке, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:03:35

Конечность дискретного спектра при нетривиальных значениях полного квазиимпульса в системе трех бозонов на решетке

Ж. И. Абдуллаев

Конечность дискретного спектра непрерывного оператора Шрёдингера H системы трех попарно взаимодействующих частиц при $\chi < 0$ установлена в работах [1], [2]. Изучению случая $\chi = 0$ посвящена работа [3], где было установлено, что даже при финитных взаимодействиях между частицами дискретный спектр оператора H может быть бесконечным. При этом вопрос о бесконечности дискретного спектра оператора H был связан с наличием так называемых виртуальных уровней в начале непрерывных спектров операторов h_α ($\alpha = 1, 2, 3$), описывающих различные подсистемы из двух частиц. В этом случае [4] получена следующая асимптотика:

$$\lim_{z \uparrow 0} \frac{N(z)}{|\ln |z||} = \mathcal{U}_0 \quad (0 < \mathcal{U}_0 < \infty), \quad (1)$$

где $N(z)$ – число собственных значений оператора H , лежащих ниже точки $z < 0$, $\mathcal{U}_0$ зависит только от отношения масс частиц. В [5] доказана конечность дискретного спектра оператора H при наличии виртуального уровня только у одного оператора h_α .

Изучению аналогичных вопросов на решетке посвящена работа [6]. Непосредственное развитие работа [6] получила в [7]. Там доказано, что если двухчастичные операторы $h_\alpha(0) \equiv h(0)$, $\alpha = 1, 2, 3$ ($h_\alpha(k)$ – одинаковые, так как рассматриваются одинаковые частицы – бозоны) имеют виртуальные уровни в нуле, то у трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера $H(0)$ имеется бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся к нулю. В этом случае существует выколотая окрестность $U_\delta^o(0) = \{p \in \mathbb{T}^3 : 0 < |p| < \delta\}$ ($\mathbb{T} \equiv (-\pi, \pi]$) такая, что при всех $K \in U_\delta^o(0)$ оператор $H(K)$ имеет лишь конечное число собственных значений, лежащих вне существенного спектра. Кроме того, получены аналогичные (1) асимптотики $N(0, z) \sim \mathcal{U}_0 |\ln |z||$ при $z \rightarrow 0$, и $N(K, 0) \sim 2\mathcal{U}_0 |\ln |K||$ при $K \rightarrow 0$, где $N(K, z)$ – число собственных значений оператора $H(K)$, лежащих левее точки $z < \tau(K) \equiv \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K))$.

В настоящей заметке дано доказательство конечности дискретного спектра оператора $H(K)$ для любого $K \neq 0$ при наличии виртуального уровня у оператора $h(0) \equiv h_\alpha(0)$, $\alpha = 1, 2, 3$.

В импульсном представлении оператор энергии системы трех бозонов с парными контактными потенциалами притяжения действует в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbb{T}^3)^3)$ по формуле

$$(Hf)(k_1, k_2, k_3) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3))f(k_1, k_2, k_3) - \mu(2\pi)^{-3} \sum_{\alpha=1}^3 \int_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3.$$

Здесь $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$, $\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos q_i)$ – энергия отдельного бозона с импульсом $q \in \mathbb{T}^3$, $\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух бозонов, $\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака.

Оператор H разлагается в прямой интеграл семейства самосопряженных операторов $\{H(K), K \in \mathbb{T}^3\}$. Оператор $H(K)$ называется оператором Шрёдингера и действует в гильбертовом пространстве $L_2^{sK}((\mathbb{T}^3)^2) = \{f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2) : f(p, q) = f(q, p) = f(p, K - p - q)\}$ по формуле (см. [6])

$$(H(K)f)(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} [f(K - p - q, s) + f(p, s) + f(s, q)] ds.$$

Здесь $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon(K - p - q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q)$.

Работа выполнена при поддержке ФПФИ АН РУз (грант №67-04).

Условия наличия виртуального уровня у оператора $h(0)$ равносильно условию $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 = 2(2\pi)^3 \left(\int_{\mathbb{T}^3} (\varepsilon(q))^{-1} dq \right)^{-1}$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mu = \mu_0$. Тогда для любого $K \neq 0$ оператор $H(K)$ имеет лишь конечное число собственных значений вне существенного спектра.

Как известно (см. [7]), существенный спектр оператора $H(K)$ состоит из отрезка $[\tau(K), \varepsilon_{\max}(K)]$, где $\varepsilon_{\max}(K) = \max_{p,q} \varepsilon_K(p, q)$ и для любого $K \neq 0$ имеет место неравенство $\tau(K) < \varepsilon_{\min}(K)$.

Пусть $T(K, z)$, $z < \tau(K)$, – симметризованный оператор Фаддеева (см. [7]), соответствующий оператору $H(K)$, и он действует в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$(T(K, z)g)(p) = \frac{2\mu_0(2\pi)^{-3}}{\sqrt{\Delta(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\varepsilon_K(p, s) - z)^{-1} g(s) ds}{\sqrt{\Delta(K-s, z-\varepsilon(s))}},$$

где $\Delta(k, z)$ – двухчастичный детерминант Фредгольма, который определяется по формуле $\Delta(k, z) = 1 - \mu_0(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} (\varepsilon(q) + \varepsilon(k-q) - z)^{-1} dq$.

Обозначим через $n(1, B)$ число собственных значений самосопряженного оператора B , лежащих правее точки 1. Принцип Бирмана–Швингера $N(K, z) = n(1, T(K, z))$, $z < \tau(K)$ доказан в [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, число $A = 0$ является глобальным минимумом для регулярной функции $\Delta(K-p, \tau(K) - \varepsilon(p))$ на $\mathbb{T}^3$. Непосредственное вычисление показывает, что уравнение $\Delta(K-p, \tau(K) - \varepsilon(p)) = 0$ имеет конечное число решений в $\mathbb{T}^3$. Сначала рассмотрим случай, когда точки минимума функции $\Delta(K-p, \tau(K) - \varepsilon(p))$ являются невырожденными. В этом случае предельный оператор $T(K, \tau(K))$ является компактным и $T(K, z)$ сходится равномерно к $T(K, \tau(K))$ при $z \rightarrow \tau(K)$. Из неравенства Вейля $N(K, z) = n(1, T(K, z)) \leq n(1 - \varepsilon, T(K, \tau(K))) + n(\varepsilon, T(K, z) - T(K, \tau(K)))$ следует конечность числа собственных значений оператора $H(K)$, лежащих ниже существенного спектра (см. также [7]). Пусть минимумы функции $\Delta(K-p, \tau(K) - \varepsilon(p))$ являются вырожденными. Из неравенства Лоясевича (см. [8]) следует, что изолированная экстремальная точка вещественно-аналитической функции является конечнократной, т.е. $|\Delta(K-p, \tau(K) - \varepsilon(p)) - \Delta(K-p^0, \tau(K) - \varepsilon(p^0))| \geq C(K)|p - p^0|^m$, $|p - p^0|^2 = \sum_{i=1}^3 (p_i - p_i^0)^2$. А функция $(\varepsilon_K(p, q) - z)^{-1}$, участвующая в ядре интегрального оператора $T(K, z)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{T}^3 \otimes \mathbb{T}^3)$ при всех $z \leq \tau(K)$. Поэтому $T(K, z)$ представляется в виде суммы двух самосопряженных операторов $T_0(K, z)$ и $T_1(K, z)$, в которой $T_0(K, z)$ – оператор конечного ранга ℓ при всех $z < \tau(K)$, а $T_1(K, z)$ компактно при $z = \tau(K)$ (см. [9]). Из неравенства Вейля имеем

$$n(1, T(K, z)) \leq n(1 - \varepsilon, T_1(K, z)) + n(\varepsilon, T_0(K, z)). \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) конечно для любого $z < \tau(K)$ из-за компактности предельного оператора $T_1(K, \tau(K))$, второе слагаемое не превышает ранга ℓ оператора $T_0(K, z)$. Отсюда и из принципа Бирмана–Швингера $N(K, z) = n(1, T(K, z))$ следует утверждение теоремы.

Автор выражает благодарность проф. И. А. Икромову за обсуждению полученных результатов.

Список литературы

- [1] Д. Р. Яфаев, *Докл. АН СССР*, **206**:1 (1972), 68–70. [2] Г. М. Жислин, *Докл. АН СССР*, **207**:1 (1972), 25–28. [3] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593. [4] A. V. Sobolev, *Comm. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126. [5] Д. Р. Яфаев, *ТМФ*, **25**:2 (1975), 185–195. [6] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 94–108. [7] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 231–245. [8] Б. Мальгранж, *Идеалы дифференцируемых функций*, Мир, М., 1968. [9] И. А. Икромов, Ф. Шарипов, *Функц. анализ и его прил.*, **32**:1 (1998), 63–65.

Ж. И. Абдуллаев (Zh. I. Abdullaev)

Самаркандский государственный университет
им. Алишера Навои

E-mail: jabdullaev@mail.ru

Представлено Р. А. Минлосом

Принято редколлегией

11.08.2006