Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. А. Ахадкулов, О некоторых гомеоморфизмах окружности с особенностями типа излома, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:30:43

О некоторых гомеоморфизмах окружности с особенностями типа излома

Х. А. Ахадкулов

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности $S^1 = [0, 1)$ с изломами, т.е. отображения, гладкие всюду за исключением нескольких особых точек, где происходит скачок первой производной. При этом рассматривается случай, когда вторая производная определена лишь почти наверное и принадлежит классу L_p , $p > 1$. Оказывается, что значительная часть теории, развитой для гладких диффеоморфизмов, переносится на этот случай.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $T_f x = \{f(x)\}$, $x \in S^1$, где скобки $\{\cdot\}$ обозначают дробную часть числа, а функция $f(x)$, определяющая гомеоморфизм T_f , обладает следующими свойствами: (а) $0 \leq f(0) < 1$; (b) $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$; (с) гомеоморфизм T_f в точках z_j , $j = \overline{0, m}$, имеет изломы, т.е. существуют положительные односторонние производные $f'(z_j \pm 0)$, $j = \overline{0, m}$, и $\frac{f'(z_j-0)}{f'(z_j+0)} = c(z_j) \neq 1$, $j = \overline{0, m}$; (d) $f'(x)$ абсолютная непрерывная функция на каждой связной компоненте множества $S^1 \setminus \{z_j, j = \overline{0, m}\}$, $f'(x) \geq \text{const} > 0$ $\forall x \in S^1 \setminus \{z_j, j = \overline{0, m}\}$; (e) $f''(x) \in L_p(S^1, dx)$ при некотором $p > 1$.

Смысл условий (а)–(е) состоит в том, что функция $f(x)$ определяет кусочно гладкий гомеоморфизм окружности, имеющий $(m+1)$ точек излома.

Хорошо известно (см. [1]), что для любого $x \in \mathbb{R}^1$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} = \rho(f)$, где $f^n(x)$ обозначает n -ю итерацию функции f . Число $\rho(f)$, называемое числом вращения, не зависит от выбора x и является важнейшей характеристикой гомеоморфизма T_f .

Пусть число вращения $\rho(f)$ иррационально. Тогда отображение T_f является строго эргодическим, т.е. обладает единственной вероятностной инвариантной мерой μ [1]. Отсюда, в частности, следует, что T_f эргодично относительно инвариантной меры μ . Обозначим λ меру Лебега на окружности S^1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение T_f называется эргодическим относительно меры Лебега, если для любого инвариантного множества A его мера $\lambda(A)$ равна 0 или 1.

Следующий результат обобщает теорему Катка, доказавшего эргодичность относительно меры Лебега для диффеоморфизмов класса C^2 (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x)$, определяющая гомеоморфизм T_f , удовлетворяет условиям (а)–(f) и число вращения $\rho = \rho(f)$ иррационально. Тогда T_f эргодично относительно меры Лебега λ .

Из теоремы 1 легко вытекает, что инвариантная мера μ или абсолютно непрерывна, или сингулярна относительно меры Лебега λ , т.е. существует измеримое подмножество A окружности S^1 такое, что $\mu(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0$.

Обозначим через T_ρ поворот окружности на угол ρ . Теорема Данжуа утверждает [2], что если $f \in C^1(\mathbb{R}^1)$ и $\text{var}_{S^1} \ln f'(x) < \infty$, то в случае иррационального числа вращения ρ диффеоморфизм T_f и линейный поворот T_ρ топологически эквивалентны, т.е. существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T_φ такой, что $T_\varphi \circ T_f = T_\rho \circ T_\varphi$. Этот классический результат Данжуа без труда переносится на случай гомеоморфизмов окружности, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Вопрос о гладкости сопрягающего гомеоморфизма T_φ тесно связан с существованием абсолютно непрерывной инвариантной меры для T_f . При этом инвариантная мера μ для T_f является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега λ тогда и только тогда, когда сопряжение T_φ задается абсолютно непрерывной функцией.

Гомеоморфизмы окружности с одной точкой излома впервые были изучены в работе Е. Б. Вул и К. М. Ханина [3]. С одной стороны, как и в случае гладких диффеоморфизмов, ренормализация таких гомеоморфизмов ведет себя достаточно просто. В перенормированных координатах итерации отображения T_f асимптотически близки к дробно-линейным преобразованиям, зависящим только от двух параметров [3]. С другой стороны, наличие одной точки излома существенно меняет ситуацию. А именно, если гомеоморфизм является гладким всюду за исключением точки излома и принадлежит классу $C^{2+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$, то в случае иррационального числа вращения инвариантная мера сингулярна относительно меры Лебега [4].

Рассмотрим гомеоморфизм T_f , удовлетворяющий условиям (а)–(е). Дополнительно предположим, что все точки излома лежат на одной траектории гомеоморфизма T_f , т.е. существует точка $x_0 \in S^1$ такая, что $z_j = T_f^{p_j} x_0$, $p_j \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\prod_{j=0}^m c_j \neq 1$ и число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально. Тогда инвариантная мера μ сингулярна относительно меры Лебега λ .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две меры ν_1 и ν_2 на одной σ -алгебре называются L_2 -эквивалентными, если существуют функции $\varphi_1 \in L_2(\nu_1)$, $\varphi_2 \in L_2(\nu_2)$ такие, что $\nu_1 = \varphi_2 \nu_2$ и $\nu_2 = \varphi_1 \nu_1$.

Рассмотрим разложение иррационального числа вращения $\rho \in (0, 1)$ в непрерывную дробь: $\rho = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Иррациональное число $\rho \in (0, 1)$ называется числом “ограниченного типа”, если последовательность $\{k_n, n = \overline{1, \infty}\}$ ограничена.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть число вращения $\rho = \rho(T_f)$ является иррациональным числом ограниченного типа и $\prod_{j=1}^m c_j = 1$. Тогда инвариантная мера L_2 -эквивалентна мере Лебега.*

ЗАМЕЧАНИЯ 1. 1. Существенно, что теоремы 2 и 3 доказываются для отображений низкой гладкости, т.е. удовлетворяющих условию (е). В случае, когда T_f принадлежит классу $C^{2+\varepsilon}$ вне точек излома, соответствующие результаты могут быть доказаны проще. В этом случае утверждение теоремы 2 является простым обобщением результата работы [4], а теорема 3 следует из [5], где близкий результат доказан для типичных иррациональных чисел вращения. Довольно ограниченное условие на число вращений (числа ограниченного типа) связано с работой И. Кацнельсона и Д. Орнштейна [6], многие идеи из которой существенно используются при доказательстве теоремы 3. Можно сказать, что теорема 3 является развитием теории Кацнельсона и Орнштейна на случай гомеоморфизмов окружности с изломами.

2. Интересным представляется вопрос об инвариантных мерах в общем случае, т.е. когда точки излома не лежат на одной траектории. В этом случае имеются основания предполагать, что инвариантная мера всегда сингулярна относительно меры Лебега.

Автор благодарен А. А. Джалилову и К. М. Ханину за ценные обсуждения. Существенная часть работы была выполнена во время визита автора в Эдинбург, которой стал возможен благодаря финансовой поддержке гранта от Королевского Общества Великобритании.

Список литературы

- [1] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
 [2] A. Denjoy, *J. Math. Pures Appl.* (9), **11** (1932), 333–375. [3] К. М. Ханин, Е. В. Вул, *Adv. Soviet Math.*, **3** (1991), 57–98. [4] А. А. Джалилов, К. М. Ханин, *Функц. анализ и его прилож.*, **32:3** (1998), 11–21. [5] А. А. Джалилов, *ТМФ*, **120:2** (1999), 179–192. [6] Y. Katznelson, D. Ornstein, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **9:4** (1989), 681–690.

Х. А. Ахадкулов (Kh. A. Akhadkulov)
 Самаркандский государственный университет
 им. Алишера Навои

Представлено Д. В. Аносовым
 Принято редколлегией
 01.08.2006