Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Шейнман, Казимиры второго порядка аффинных алгебр Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 05:42:30

КАЗИМИРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА АФФИННЫХ АЛГЕБР КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ И $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$

О. К. ШЕЙНМАН

В заметке дается описание казимиров второго порядка и некоторых более общих операторов для аффинных алгебр Кричевера–Новикова.

Пусть Σ – компактная алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$ с двумя отмеченными точками $P_{\pm}$, $\mathcal{A}$ – алгебра мероморфных функций на Σ , регулярных вне точек $P_{\pm}$, $\mathcal{L}$ – алгебра Ли векторных полей на Σ , удовлетворяющих тем же требованиям, $\mathfrak{g}$ – конечномерная полупростая или редуктивная алгебра Ли ранга r . Линейное пространство $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}c$ со скобкой, которую мы определим ниже, называется аффинной алгеброй Кричевера–Новикова [1]. Ниже мы опускаем символ $\otimes$ в обозначениях. Мы ограничиваемся случаями, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r)$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r)$. В первом случае мы используем для $\widehat{\mathfrak{g}}$ обозначение $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$, а во втором $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$, опуская указание на ранг. Скобка на $\widehat{\mathfrak{g}}$ задается соотношениями $[xA, yB] = [x, y]AB + \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) \text{res}_{P_+}(AdB)c$, $[xA, c] = 0$ ($x, y \in \mathfrak{g}$, $A, B \in \mathcal{A}$). Рассмотрим также алгебру Ли $\widehat{\mathcal{L}}^1$, равную полупрямой сумме $\widehat{\mathfrak{g}}$ и $\mathcal{L}$.

В [2], [3] введены фермионные представления алгебр $\widehat{\mathfrak{g}}$. Они параметризуются тройками, состоящими из голоморфного векторного расслоения на Σ , доминантного веса алгебры $\mathfrak{g}$ и целого числа – *заряда*. Благодаря наличию на голоморфном векторном расслоении канонической плоской связности, на соответствующем фермионном представлении можно ввести структуру $\widehat{\mathcal{L}}^1$ -модуля. Каждое *допустимое* [4] представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ канонически определяет проективное представление алгебры $\mathcal{L}$ в том же пространстве – так называемое представление Сугавара (для алгебр Кричевера–Новикова определено, например, в [4]). Можно говорить и о представлении Сугавара для представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$. При этом последние предварительно ограничиваются на $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. Для $e \in \mathcal{L}$ пусть $\widehat{e}$ – оператор представления векторного поля e в силу структуры $\widehat{\mathcal{L}}^1$ -модуля, а $T(e)$ – его оператор Сугавара. Рассмотрим оператор вида $\Delta_e := \widehat{e} - T(e)$. Пусть $\overline{\mathcal{L}}$ – пополнение алгебры Ли $\mathcal{L}$, состоящее из рядов вида $\sum_{k \geq K} e_k$, где $e_k \in \mathcal{L}$, $\text{ord}_{P_+} e_k = k + 1$, $K \in \mathbb{Z}$. Для допустимых представлений операторы $\widehat{e}$, $T(e)$, Δ_e корректно определены не только для $e \in \mathcal{L}$, но и для $e \in \overline{\mathcal{L}}$. Можно показать, что $[\Delta_e, \widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}] = 0$ для всех $e \in \overline{\mathcal{L}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть V – допустимый $\widehat{\mathcal{L}}^1$ -модуль. Те из операторов Δ_e , $e \in \overline{\mathcal{L}}$, которые коммутируют со всеми операторами представления алгебры $\mathcal{A}$ в V , называются казимирами (второго порядка) алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в представлении V .

ЗАМЕЧАНИЯ. Слова “второго порядка” имеют здесь тот смысл, что Δ_e квадратично зависят от генераторов алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Требование перестановочности Δ_e с кольцом операторов $\mathcal{A}$ имеет различный смысл для $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и для $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. В первом случае оно эквивалентно требованию перестановочности со всей алгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}$. Во втором случае $\mathcal{A}$ не является подалгеброй в $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$, но коммутирует с ней в $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$. Таким образом, операторы из $\mathcal{A}$ приводят фермионное представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. Требование перестановочности в этом случае обеспечивает инвариантность неприводимых компонент фермионного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ относительно Δ_e .

ТЕОРЕМА 1. В фермионных представлениях общего положения существует ровно один (с точностью до скалярного множителя) казимир второго порядка. Соответствующее векторное поле имеет простой нуль в точке P_+ .

Имеет место [1] разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$, где $\mathcal{A}_{\pm} = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{ord}_{P_{\pm}} A > 0\}$ – подалгебры, $\mathcal{A}_0$ – некоторое подпространство. Положим $\tilde{\mathcal{A}}_- = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00198).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем оператор вида Δ_e , $e \in \overline{\mathcal{E}}$, полуказимиром, если $[\Delta_e, A] = 0$ для всех $A \in \widetilde{\mathcal{A}}_-$.

Оказывается, существует тесная связь между полуказимирами, конформными блоками и пространством модулей римановых поверхностей с отмеченными точками. Пусть $\mathcal{M}_{g,2}^{(1)}$ — пространство модулей римановых поверхностей рода g с двумя отмеченными точками и фиксированными 1-струями локальных координат в этих точках. Для $\Sigma \in \mathcal{M}_{g,2}^{(1)}$ пусть $T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(1)}$ обозначает касательное пространство к этому пространству модулей в точке Σ . Рассмотрим также пространство коинвариантов (конформных блоков) подалгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_-$ в фермионном представлении алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r)$.

ТЕОРЕМА 2. Полуказимиры корректно определены на конформных блоках. Для фермионных представлений общего положения существует канонический эпиморфизм пространства $T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(1)}$ на пространство операторов, индуцированных полуказимирами на конформных блоках над точкой $\Sigma \in \mathcal{M}_{g,2}^{(1)}$.

Автор благодарен М. Шлихенмайеру и Б. Фейгину за обсуждения. Полный текст работы представлен в Moscow Mathematical Journal.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Функци. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 2. С. 46–63. [2] О. К. Шейнман. Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова // Функци. анализ и его прил. 2001. № 3. [3] О. К. Шейнман // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 185–186. [4] М. Schlichenmaier, О. К. Sheinman // J. Math. Sci. 1998. V. 92. № 2. P. 3807–3834; q-alg/9512016, 1995.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Независимый московский университет
E-mail: oleg@sheinman.mcsme.ru

Принято редколлегией
22.08.2001