Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Типы и граничная единственность полипентагонов, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:29:07

Типы и граничная единственность полипентагонов

М. Деза, М. И. Штогрин

Неразделимый плоский граф, взятый вместе с внутренними гранями, образует (r, q) -полицикл, если все внутренние грани суть r -угольники (где $r = \text{const} \geq 3$), а все внутренние вершины имеют наибольшую из степеней, обозначаемую через q (где $q = \text{const} \geq 3$), см. [1]. Каждый конечный (r, q) -полицикл гомеоморфен кругу, а его край гомеоморфен окружности. Циклическую последовательность $q_1 q_2 \dots q_m$, составленную из степеней q_i , $i = 1, \dots, m$, всех m вершин края (r, q) -полицикла, назовем *граничным кодом*¹. Назовем r -угольник *приграничным*, если хотя бы одно его ребро принадлежит краю. Если пересечение приграничного r -угольника с краем является связным, то он *устраним* – без этого r -угольника остаток снова является (r, q) -полициклом, см. [2]. Два (r, q) -полицикла с одним и тем же краем назовем *эквиграничными*. Эквиграничные (r, q) -полициклы состоят из одного и того же числа r -угольников p_r , см. [3]. Эквиграничную пару (r, q) -полициклов назовем *неприводимой*, если каждое ребро края, принадлежащее устранимому r -угольнику одного (r, q) -полицикла из данной пары, принадлежит неустраняемому r -угольнику другого (r, q) -полицикла из этой же пары, см. [2]. Для каждого $r \geq 5$ в [4] найден пример эквиграничной пары $(r, 3)$ -полициклов с числом $p_r = 4r$ и высказана гипотеза, что $4r$ является минимальным значением для величины p_r . Эта гипотеза доказана в [2] при $r = 6$. Ниже она доказана при $r = 5$, т.е. для $(5, 3)$ -полициклов; назовем их *полипентагонами*².

ТЕОРЕМА. (i) При $p_5 \leq 19$ нет ни одной пары эквиграничных полипентагонов.

(ii) При $p_5 = 20$ существует одна (неприводимая) пара эквиграничных полипентагонов. Она имеет следующий граничный код: $3^3 232323^6 232323^3 232323^6 23232$.

(iii) При $p_5 = 21$ имеются три (приводимые) пары. $3^3 232323^6 2323^4 2323^6 23232$, $3^3 232323^6 23^2 2^3 4^2 232323^6 23232$, $3^3 232323^7 2^2 3^2 23^3 232323^6 23232$ – их граничные коды.

(iv) При $p_5 = 22$ имеется семнадцать пар эквиграничных полипентагонов.

(v) При любом $p_5 \geq 23$ имеется не менее 17 пар, получаемых расширениями³.

Внутреннее ребро произвольного (r, q) -полицикла, чьи оба конца лежат на границе, назовем *сквозным*. Любой (r, q) -полицикл без сквозных ребер назовем *элементарным*.

ЛЕММА 1. Произвольный (r, q) -полицикл при разрезании по всем имеющимся у него сквозным ребрам однозначно разбивается на элементарные полициклы.

Эти элементарные полициклы назовем *элементарными слагаемыми* (r, q) -полицикла. Вид и обозначения элементарных слагаемых полипентагонов см. в [1; рис. 5].

Построим *граф смежности* элементарных слагаемых (r, q) -полицикла: вершины графа соответствуют элементарным слагаемым; две вершины графа соединены ребром, если соответствующие элементарные слагаемые смежны, т.е. имеют общее ребро.

ЛЕММА 2. Граф смежности элементарных слагаемых полицикла есть дерево.

В любом нетривиальном дереве склеек элементарных слагаемых содержатся по меньшей мере два висячих элементарных слагаемых. Одно граничное ребро висячего элементарного слагаемого является сквозным ребром объемлющего (r, q) -полицикла; все остальные его граничные ребра остаются граничными ребрами полицикла.

Граничный код (r, q) -полицикла мы можем записывать не только в развернутом виде, но и в свернутом виде, когда количество подряд идущих в циклической после-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00170), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4182.2006.1) и программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

¹Это вершинный граничный код. В работе [2] использован реберный граничный код.

²Известен пример граничного кода [4; предложение 3], допускающего ровно $n + 1$ эквиграничных полипентагонов. Любой имеет $40n + 18$ вершин, $60n + 23$ ребер, $20n + 6$ граней.

³Если граничный код конечного полипентагона отличен от 3^5 , то он *расширяем*, см. [1].

довательности одинаковых степеней указывается в показателе. В случае полипентагона, т.е. $(5, 3)$ -полицикла, граничный код в свернутом виде состоит из двоек и троек с какими-то показателями. Набор показателей для двоек мы будем называть *типом* полипентагона и записывать в фигурных скобках. Так, например, в формулировке теоремы, случай (iii), полипентагоны с первым граничным кодом имеют тип $\{1\}$, а полипентагоны с двумя другими граничными кодами имеют тип $\{1; 2\}$ или $\{2; 1\}$.

Все (конечные и бесконечные) полипентагоны однозначно разбиваются на 9 типов.

Tun $\{5\}$. Единственным полипентагоном типа $\{5\}$ является D , см. [1; рис. 5].

Tun $\{3\}$. Любой полипентагон типа $\{3\}$ неэлементарен и состоит из элементарных слагаемых C_1 (каждое C_1 смежно с двумя соседними элементарными слагаемыми), C_3 , E_1 (каждое C_3 , E_1 смежно с тремя соседними элементарными слагаемыми), D (каждое D висячее: оно смежно с одним соседом). (Бес)конечные полипентагоны типа $\{1\}$ содержат не менее (одного) двух элементарных слагаемых D .

Tun $\{2\}$. Полипентагоны типа $\{2\}$ состоят из элементарных слагаемых C_1 , C_3 , E_1 .

Tun $\{1\}$. Элементарные полипентагоны типа $\{1\}$ суть A_2 , A_3 , A_4 , A_5 . Неэлементарные полипентагоны типа $\{1\}$ состоят из элементарных слагаемых C_3 , E_1 (смежных с 3 соседями), C_1 , C_2 , D , E_j , $j \geq 2$ (смежных с 2 соседями), B_1 , B_2 , B_3 (висячих).

Tun $\{0\}$. Элементарные полипентагоны типа $\{0\}$ – это конечный полипентагон A_1 и бесконечный полипентагон A_6 . Неэлементарные полипентагоны типа $\{0\}$ бесконечны и состоят из C_1 (смежных с двумя соседями), C_3 , E_1 (смежных с тремя соседями).

Tun $\{3; 2; 1\}$. Полипентагоны типа $\{3; 2; 1\}$ неэлементарны и состоят из элементарных слагаемых B_1 , B_2 , B_3 , C_1 , C_2 , C_3 , D , E_j при $j \geq 1$. Хотя бы одно D висячее.

Tun $\{3; 2\}$. Полипентагоны типа $\{3; 2\}$ неэлементарны и состоят из элементарных слагаемых C_1 , C_3 , D , E_1 . Каждое элементарное слагаемое D является висячим.

Tun $\{3; 1\}$. Полипентагоны типа $\{3; 1\}$ неэлементарны и состоят из элементарных слагаемых B_1 , B_2 , B_3 , C_1 , C_2 , C_3 , D , E_j при $j \geq 1$. Хотя бы одно D является висячим.

Tun $\{2; 1\}$. Элементарные полипентагоны типа $\{2; 1\}$ суть B_1 , B_2 , B_3 , C_2 , D , E_j , $j \geq 2$. Неэлементарные полипентагоны типа $\{2; 1\}$ состоят из элементарных слагаемых B_1 , B_2 , B_3 , C_1 , C_2 , C_3 , D , E_j , $j \geq 1$. Каждое D смежно с двумя соседями.

Любая пара эквиграничных полипентагонов типа $\{2; 1\}$ или $\{2\}$ приводима посредством следующей перестройки фрагмента граничного кода: $32^23 \rightarrow 232$.

Любая пара эквиграничных полипентагонов типа $\{3; 2; 1\}$, $\{3; 2\}$, $\{3; 1\}$ или $\{3\}$ приводима посредством перестройки фрагмента граничного кода: $32^33 \rightarrow 2^2$.

ЛЕММА 3. Полипентагоны неприводимой эквиграничной пары имеют тип $\{1\}$.

СЛЕДСТВИЕ. Эквиграничная пара с минимальным p_5 имеет тип $\{1\}$.

Среди элементарных слагаемых конечных неэлементарных полипентагонов типа $\{1\}$ есть висячие B_2 и/или B_3 , могут быть не висячие C_1 и/или C_2 , C_3 , D , E_j , $j \geq 1$.

Список литературы

- [1] M. Deza, M. Shtogrin, *J. Geom. Phys.*, **40**:3–4 (2002), 302–319. [2] X. Guo, P. Hansen, M. Zheng, *Discrete Appl. Math.*, **118**:3 (2002), 209–222. [3] G. Brinkmann, O. Delgado-Friedrichs, U. von Nathusius, *Graphs and discovery*, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **69**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 27–38. [4] M. Dutour, M. Deza, M. Shtogrin, “Fillings of a given boundary by p -gons and related problems”, *Proceedings of International Conference “General Theory of Information Transfer and Combinatorics”* (Bielefeld, 2004) (to appear).

М. Деза (M. Deza)
École Normale Supérieure, Paris
E-mail: Michel.Deza@ens.fr

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
02.08.2006

М. И. Штогрин (M. I. Shtogrin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru