Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Хорошкин, Сизигии некоторых квадратичных многообразий и их связь с кохомологиями алгебр Ли, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 5, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:38:41

Сизигии некоторых квадратичных многообразий и их связь с когомологиями алгебр Ли

А. С. Хорошкин

1. Сизигии и когомологии алгебр Ли. Пусть $i: M \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ – вложение многообразия M в проективное пространство, заданное набором квадратичных уравнений Q , так что однородное координатное кольцо $\mathcal{O}_M$ является квадратичной коммутативной алгеброй $SV/(Q)$. Нас интересует подсчет сизигий этого вложения, т.е. минимальный набор уравнений, минимальный набор соотношений на уравнения, минимальный набор соотношений на соотношения и т.д. На гомологическом языке этой задаче отвечает подсчет группы $\mathrm{Tor}^{SV}(\mathcal{O}_M, \mathbb{k})$, где $\mathbb{k}$ – основное поле характеристики нуль. Естественная градуировка по степени на симметрической алгебре SV задает градуировку на $\mathcal{O}_M$ и на пространствах сизигий, которую мы будем обозначать вторым индексом в $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{SV}(\mathcal{O}_M, \mathbb{k})$.

У квадратичной коммутативной алгебры $\mathcal{O}_M$ имеется квадратично двойственная супералгебра Ли $L^M := \mathcal{L}ie(V^*[1])/(Q^\perp)$, где $V^*[1]$ – двойственное пространство с измененной четностью. Квадратично двойственная ассоциативная алгебра $\mathcal{O}_M^1$ является универсальной обертывающей алгеброй $U(L^M)$. Алгебра Ли L^M снабжена естественной градуировкой по степени элементов и содержит подалгебру Ли $L_{\geq 2}^M$, состоящую из элементов степени не меньшей 2. Имеет место следующая теорема, связывающая сизигии с этой алгеброй Ли.

ТЕОРЕМА [1], [2]. *Если квадратичная коммутативная алгебра $\mathcal{O}_M$ кошулева, то для любой пары (k, l) компонента степени l в k -х сизигиях изоморфна компоненте степени l в $(l - k)$ -х когомологиях алгебры Ли $L_{\geq 2}^M$:*

$$\mathrm{Tor}_{k,l}^{SV}(\mathcal{O}_M, \mathbb{k}) = H^{l-k}(L_{\geq 2}^M)_{(l)}.$$

Настоящая работа посвящена применению этой абстрактной теоремы к вычислению сизигий грассманиана двумерных плоскостей. Основной результат содержится в теореме 1.

2. Кривая Веронезе. Пусть U – плоскость с координатами (u, v) . Вложение Веронезе $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(S^n U)$ в мономиальных координатах на $\mathbb{P}(S^n U)$ задается отображением

$$(u : v) \mapsto (u^n : u^{n-1}v : u^{n-2}v^2 : \dots : v^n).$$

Соответствующая координатная алгебра $\mathcal{O}_{\mathrm{Ver}}$ квадратичная и кошулева [3; гл. 3, § 2],

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Ver}} = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]/(x_i x_j - x_k x_m \mid i + j = k + m).$$

В двойственных координатах ξ_i на $V^* := S^n U^*$ квадратично-двойственная алгебра Ли имеет вид

$$L^{\mathrm{Ver}} := \mathcal{L}ie(\xi_i) / \left(\sum_{i+j=k} [\xi_i, \xi_j] = 0 \mid k = 0, 1, \dots, 2n \right). \quad (1)$$

Выберем фильтрацию на супералгебре Ли L^{Ver} , упорядочив образующие следующим образом: $\xi_0 > \xi_n > \xi_{n-1} > \dots > \xi_1$. Старший моном k -го соотношения из (1) равен $[\xi_0, \xi_k]$ для $k \leq n$ и $[\xi_n, \xi_{k-n}]$ для $k \geq n$. Поэтому присоединенно градуированная к этой фильтрации супералгебра Ли является суммой коммутативной подалгебры Ли, порожденной ξ_0, ξ_n , и свободной $\mathcal{L}ie(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Известно, что любая подалгебра Ли свободной алгебры Ли свободна и имеет нулевые когомологии с номером, большим единицы. Таким образом,

$$H^p(L_{\geq 2}^{\mathrm{Ver}}) = H^p(\mathcal{L}ie(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})) = 0, \quad \text{если } p > 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. k -е сизигии кривой Веронезе в $\mathbb{P}^n$ отличны от нуля только в степени $k+1$, и $\dim \mathrm{Tor}_{k,k+1}^{SV}(\mathcal{O}_{\mathrm{Ver}}, \mathbb{k}) = k \binom{n}{k+1}$.

3. Грассманиан $\mathbf{Gr}(2, N)$. Пусть W – N -мерное векторное пространство. Рассмотрим плюккерово вложение $i_{\mathbf{Gr}}: \mathbf{Gr}(2, N) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^2 W^*)$. Естественное действие группы замены координат $\mathbf{GL}_N$ на пространстве $\mathbb{P}(\wedge^2 W^*)$, сохраняющее $\mathbf{Gr}(2, W^*)$, продолжается на пространства сизигий. Мы опишем это действие, используя стандартные обозначения π_λ для неприводимого представления группы $\mathbf{GL}_N$, соответствующего диаграмме Юнга λ . Мы используем две формы записи для диаграмм Юнга: классическая форма $-\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_l]$, где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l$, а также форма Фробениуса $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_p | \beta_1, \dots, \beta_p)$, где p – число клеток на диагонали диаграммы λ , а значит, и ее транспонированной λ' , числа α_i, β_i определены как длины строк и столбцов вне диагонали, т.е. $\alpha_i = \lambda_i - i$ и $\beta_i = \lambda'_i - i$.

Определим биградуированную косокоммутативную $\mathbf{GL}_N$ -эквивариантную алгебру $A = \bigoplus_{k,l} A_{k,l}$, где компонента $A_{k,l}$ изоморфна как $\mathbf{GL}_N$ -модуль прямой сумме представлений:

$$A_{k,l} = \bigoplus_{\substack{N-2 \geq i_1 > \dots > i_k > 1 \\ i_1 + \dots + i_k = l}} \pi_{(i_1-2, \dots, i_k-2 | i_1+1, \dots, i_k+1)}.$$

Алгебра A порождена своей первой компонентой

$$A_1 := \bigoplus_{2 \leq l \leq N-2} A_{1,l} = \bigoplus_{2 \leq l \leq N-2} \pi_{(l-2 | l+1)},$$

и произведение $A_{1,l_1} \otimes \dots \otimes A_{1,l_k} \longrightarrow A_{k, (l_1 + \dots + l_k)}$ пропорционально единственному $\mathbf{GL}$ -эквивариантному проектору на неприводимое подпредставление:

$$\pi_{(l_1-2, \dots, l_k-2 | l_1+1, \dots, l_k+1)} \subset \pi_{(l_1-2 | l_1+1)} \otimes \dots \otimes \pi_{(l_k-2 | l_k+1)},$$

если $l_1 > \dots > l_k$, и равно нулю, если какие-то из чисел l_i совпадают.

ЛЕММА 1. Алгебра A квадратичная и кошулева.

ТЕОРЕМА 1. (i) Биградуированная алгебра когомологий алгебры Ли $L_{\geq 2}^{\mathbf{Gr}(2, N)}$ совпадает с квадратичной кошулевой алгеброй A .

(ii) $\mathrm{Tor}_{k,l}^{SV}(\mathcal{O}_{\mathbf{Gr}}, \mathbb{k}) = A_{l-k,l}$.

Автор выражает глубокую благодарность А.Л. Городенцеву, А.С. Лосеву, М.В. Мовшеву, Г.И. Ольшанскому, Д.И. Пионтковскому, А.Н. Рудакову и Б.Л. Фейгину за ценные обсуждения

Список литературы

- [1] A. Khoroshkin, *Another interpretation of syzygies of Koszul algebras*, Preprint ITEP-TH-91/04, ИТЭФ, М., 2004; <http://elib.itep.ru/Mathphys/Preprint/Pr04.htm>. [2] R. Fröberg, C. Löfwal, *Homology Homotopy Appl.*, 4:2, part 2 (2002), 227–258. [3] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

А. С. Хорошкин (A. S. Khoroshkin)

Институт теоретической и экспериментальной физики
E-mail: khorosh@mccme.ru

Представлено С. К. Ландо

Принято редколлегией
02.08.2006