Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, Об устойчивости верхней границы спектра относительно возмущений диагональными матрицами для некоторого класса самосопряженных операторов, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:09:31

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ
СПЕКТРА ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМУЩЕНИЙ
ДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО
КЛАССА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ**

С. В. САВЧЕНКО

Пусть A – бесконечная неразложимая симметрическая матрица с неотрицательными элементами a_{ij} . Положим

$$(1) \quad \Phi_{ii}(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_0=i, i_n=i} a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_m i_{m+1}} \cdots a_{i_{n-1} i_n} z^n.$$

Обозначим через $R(A)$ радиус сходимости ряда (1) (для неразложимой матрицы он не зависит от i). При $R(A) > 0$ матрица A порождает ограниченный самосопряженный оператор на пространстве ℓ_2 , спектральный радиус $\rho(A)$ которого равен $R(A)^{-1}$ (см. [1]). В круге $|z| < R(A)$ справедливо тождество $1 + \Phi_{ii}(A, z) = \int (1 - \lambda z)^{-1} (E(d\lambda)e_i, e_i)$, где $E(\cdot)$ – разложение единицы для оператора A и e_i – нормированный вектор с i -й координатой, равной единице. Если в (1) добавить условие $i_m \neq i$ при $m = 1, \dots, n-1$, то мы получим ряд $\varphi_{ii}(A, z)$, сумма которого связана с суммой ряда (1) следующим тождеством: $1 + \Phi_{ii}(A, z) = (1 - \varphi_{ii}(A, z))^{-1}$. Пусть $r_{ii}(A)$ – радиус сходимости ряда $\varphi_{ii}(A, z)$. Для любого i точка $z = R(A)$ – единственное решение уравнения $\varphi_{ii}(A, z) = 1$ на интервале $(0, r_{ii}(A))$, если $\varphi_{ii}(A, r_{ii}(A)) > 1$, и $R(A) = r_{ii}(A)$ в противном случае. Известно (см. [2]), что точка $z = \rho(A)$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\varphi_{ii}(A, R(A)) = 1$ и $\varphi'_{ii}(A, R(A)) < \infty$ при некотором, а следовательно, и при любом i (в дальнейшем мы будем опускать эту фразу после подобного рода выражений). В работе [3] автором было показано, что справедливость неравенства $r_{ii}(A) > R(A)$ является необходимым и достаточным условием для изолированности точки $z = \rho(A)$ от остальной части спектра.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{D}_+$ – класс отличных от нуля операторов D , порожденных диагональными матрицами с неотрицательными элементами d_{ii} . Тогда

- 1) для любого $D \in \mathcal{D}_+$ справедливо неравенство $\rho(A) < \rho(A+D) \iff \varphi_{ii}(A, R(A)) = 1$ (возвратность);
- 2) существуют такие $b_i > 0$, что для любого $D \in \mathcal{D}_+$ с $\sum_i b_i d_{ii} \leq 1$ имеем $\rho(A+D) = \rho(A) \iff \varphi_{ii}(A, R(A)) < 1$ (невозвратность);
- 3) существует такой $D \in \mathcal{D}_+$ с $\|D\|_{Tr} = \sum_i d_{ii} < \infty$, что $\rho(A + \lambda D) > \rho(A)$ при любом $\lambda > 0 \iff \sup_i \varphi_{ii}(A, R(A)) = 1$;
- 4) существует такое $\delta > 0$, что для любого $D \in \mathcal{D}_+$ с $\|D\|_{Tr} < \delta$ имеем $\rho(A+D) = \rho(A) \iff \sup_i \varphi_{ii}(A, R(A)) < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\sup_i \varphi_{ii}(A, R(A)) < 1$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_+$ с $\|D\|_{Tr} < \infty$ число точек дискретного спектра оператора $A + D$, расположенных выше уровня $z = \rho(A)$, конечно.

Для любого $D \in \mathcal{D}_+$ положим $\lambda(A, D) = \max\{\lambda \geq 0 : \rho(A + \lambda D) = \rho(A)\}$. Пусть $\mathcal{P}_+$ – множество операторов из $\mathcal{D}_+$ конечного ранга. Для $P \in \mathcal{P}_+$ матрица $A + \lambda(A, P)P$ возвратна. В силу теоремы 4.1 [2] положительное решение $\psi(A, P)$ (необязательно из ℓ_2) уравнения

$$(2) \quad (A + \lambda(A, P)P)\psi = \rho(A)\psi$$

существует и единственно с точностью до умножения на константу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $P \in \mathcal{P}_+$. Если выполнено условие $\sup_i \varphi_{ii}(A, R(A)) < 1$, то координаты вектора $\psi(A, P)$ равномерно ограничены ($\psi(A, P) \in \ell_\infty$). Он принадлежит пространству ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\varphi'_{ii}(A, R(A)) < \infty$.

Пусть H_d – оператор (дискретный свободный гамильтониан), действующий на векторы $\psi = \{\psi_{\mathbf{n}}\}$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, по следующей формуле:

$$(H_d \psi)_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}': \|\mathbf{n}' - \mathbf{n}\|=1} \psi_{\mathbf{n}'}, \quad \text{где } \|\mathbf{n}\| = \sum_{k=1}^d |n_k|.$$

Из возвратности при $d = 1, 2$ и невозвратности при $d \geq 3$ симметрического случайного блуждания на квадратной решетке $\mathbb{Z}^d$, теоремы 1 (пп. 1 и 4) и следствия 1 получаем утверждение, которое для оператора ранга один было сформулировано в лемме 2 [4].

ТЕОРЕМА 2. 1) Если $d = 1, 2$, то $\lambda(H_d, D) = 0$ для любого $D \in \mathcal{D}_+$.

2) Если $d \geq 3$, то существует такое $\delta(d) > 0$, что $\lambda(H_d, D) > \delta(d) \|D\|_{Tr}^{-1}$ для любого $D \in \mathcal{D}_+$ с $\|D\|_{Tr} < \infty$. При $\lambda > \lambda(H_d, D)$ дискретный спектр оператора $H_d + \lambda D$ непуст и конечен.

Неравенство $\varphi'_{\mathbf{nn}}(H_d, (2d)^{-1}) < \infty$ справедливо тогда и только тогда, когда $d \geq 5$ (см. формулу (7.5) в [1]). Поэтому применение предложения 1 дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $P \in \mathcal{P}^+$. Тогда при любом $d \geq 3$ координаты вектора $\psi(H_d, P)$ стремятся к нулю при $\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty$. Он принадлежит пространству $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ (является локализованным) тогда и только тогда, когда $d \geq 5$. При любом d вектор $\psi(H_d, P)$ не содержится в пространстве $\ell_1(\mathbb{Z}^d)$.

Предложение 1 не гарантирует убывание к нулю координат $\psi_{\mathbf{n}}$ вектора $\psi \equiv \psi(H_d, P)$: в нашем случае это является следствием независимости $\Phi_{\mathbf{nn}}(H_d, z)$ от $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Если предположить, что $\psi \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$, то, применив преобразование Фурье к равенству (2) при $A = H_d$, получим уравнение

$$\left(2d - 2 \sum_{k=1}^d \cos t_k\right) \widehat{\psi}(\mathbf{t}) = \lambda(H_d, P) \widehat{P\psi}(\mathbf{t}),$$

где $\widehat{\psi}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \psi_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}$, $\widehat{P\psi}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} p_{\mathbf{nn}} \psi_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$. При $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ левая часть этого уравнения обращается в ноль, а правая является положительным числом. Противоречие.

Пусть $\{V_{\mathbf{n}}(\omega)\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, – последовательность независимых случайных величин, одинаково распределенных на конечном отрезке $[0, b]$, где $b > 0$. Определим бесконечную диагональную матрицу $\mathbf{V}(\omega)$ с элементами $v_{\mathbf{nn}}(\omega) = V_{\mathbf{n}}(\omega)$, где $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Оператор $H_d(\omega) \equiv H_d + \mathbf{V}(\omega)$ является самосопряженным и с вероятностью один его спектр состоит из отрезка $[-2d, 2d + b]$. Нетрудно показать справедливость почти наверное неравенства $\varphi_{\mathbf{nn}}(H_d(\omega), (2d + b)^{-1}) < 1$. В теореме 4 работы [5] доказано, что если плотность распределения случайной величины $V_{\mathbf{n}}(\omega)$ достаточно мала, то с вероятностью единица $\varphi'_{\mathbf{nn}}(H_d(\omega), (2d + b)^{-1}) < \infty$. Поэтому справедливо следующее утверждение (см. предложение 1 и с. 88 в [6]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $P \in \mathcal{P}^+$. Тогда при любом d для почти каждого ω величина $\lambda(H_d(\omega), P)$ больше нуля и вектор $\psi(H_d(\omega), P)$ является экспоненциально локализованным, т.е. $\psi_{\mathbf{n}}(H_d(\omega), P) \leq C(\omega, P) e^{-\gamma \|\mathbf{n}\|}$ при некоторых $C(\omega, P) > 0$ и $\gamma > 0$.

Работа поддержана грантом INTAS-RFBR 95-418.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mohar B., Woess W. // Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21. P. 209–234. [2] Vere-Jones D. // Pacific J. Math. 1968. V. 26. P. 601–620. [3] Савченко С. В. // УМН. 1997. Т. 52. №3. С. 175–176. [4] Голицына А. Г., Молчанов С. А. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. №6. С. 1302–1306. [5] Савченко С. В. // ТМФ. 1998. Т. 114. №1. С. 94–103. [6] Simon B., Wolff T. // Comm. Pure Appl. Math. 1986. V. 39. P. 75–90.