Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Якобсон, Н. С. Надирашвили, Д. Тот, Геометрические свойства собственных функций, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 67–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 04:55:42

УДК 514.74+517.95

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Н. НАДИРАШВИЛИ, Дж. ТОТ, Д. ЯКОБСОН

Статья является обзором некоторых новых и старых результатов о геометрических свойствах собственных функций лапласианов на римановых многообразиях. Мы обсуждаем свойства узловых множеств и критических точек, число узловых областей, а также асимптотические свойства собственных функций в пределе высоких энергий (в том числе слабые* пределы, скорость роста L^p -норм и соотношения между положительными и отрицательными частями собственных функций).

Библиография: 198 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	67
§ 2. Узловые множества	68
§ 3. Собственные функции и их критические точки	70
§ 4. Пределы собственных функций	71
§ 5. Эргодические геодезические потоки	72
§ 6. Интегрируемые геодезические потоки	76
§ 7. L^p -нормы	79
§ 8. Свойства квазисимметрии собственных функций	80
Список литературы	81

§ 1. Введение

Хорошо известно, что на компактном римановом многообразии M можно выбрать ортонормированный базис в $L^2(M)$, состоящий из собственных функций φ_j оператора Δ , удовлетворяющих соотношениям

$$\Delta \varphi_j + \lambda_j \varphi_j = 0, \quad (1)$$

где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения. Цель этого обзора — привести ряд недавних (а также не столь недавних) результатов об асимптотике собственных

Работа первого автора частично поддержана грантами NSF и NSERC. Работа второго автора частично поддержана NSF (грант DMS-9971932). Работа третьего автора частично поддержана фондом Альфреда Слоана и NSERC (грант OGP0170280).

функций оператора Лапласа на компактном многообразии. Мы здесь рассматриваем главным образом результаты об узловых множествах, асимптотических оценках в L^p и задачу об определении слабых пределов ожидаемых значений (т.е. квантовый хаос). Это – отнюдь не исчерпывающий обзор на тему о спектральных асимптотиках. Мы обсуждаем главным образом вопросы о собственных функциях, представляющие интерес и для самих авторов. Мы не обсуждаем также ни статистики собственных значений, ни огромной литературы вокруг формулы волнового следа, ни результатов по теории случайных матриц. По этим и другим вопросам мы отсылаем читателя к [1]–[5] и приведенной там литературе. Наконец, мы признаем, что не касались огромной физической литературы по собственным функциям, и по этому поводу отсылаем читателя, например, к [6]–[10] и приведенной там литературе.

§ 2. Узловые множества

Поведение узловых линий собственных функций лапласиана было впервые исследовано немецким физиком Е. Ф. Хладни [11], [12]. Он выявлял узловые линии вибрирующей металлической пластинки, проводя скрипичным смычком по металлическим пластинкам, посыпанным песком, и систематически зарисовывал полученные картины. Лорд Рэлей в своем классическом исследовании “Теория звука” [13] показал для различных областей, как узловые линии меняются вместе с областью. После Рэрея было много попыток понять замысловатые рисунки узловых линий собственных функций. Первыми классическими результатами были теорема Штурма о колеблющейся струне [14] и принадлежащая Куранту теорема [14] о числе узловых областей (связных компонент дополнения узлового множества):

ТЕОРЕМА 2.1. *n -я собственная функция может иметь не более n узловых областей.*

Плейель [15] улучшил оценку Куранта. Недавно Блюм, Гнуцман и Смилански [16] изучили предельное распределение переменной ν_j/j , где ν_j – число узловых областей для φ_j . Они нашли предельное распределение для поверхностей с интегрируемыми геодезическими потоками (ср. § 6) для разделяющихся переменных.¹ Они рассматривали также задачу Дирихле для плоских бильярдов с эргодическим бильярдным потоком и изучили предельное распределение числа узловых областей и пересечений узловых кривых с границей (сравнивая предсказания теории случайных волн (ср. § 5) с численными подсчетами собственных функций). Собственные функции с *малым* числом узловых областей были построены в [14] и [17]; см. также § 3.

Мы сейчас обсудим локальную и метрическую структуру узловых множеств колеблющихся мембран, собственных функций оператора Δ на римановых многообразиях, решения уравнения Шрёдингера, и т. д. В двумерном случае локальная структура описывается следующей теоремой Берса [18]:

ТЕОРЕМА 2.2. *Если $\varphi(x) = 0$, то в любой окрестности x узловая линия является либо гладкой кривой, либо результатом пересечения n гладких кривых под равными углами.*

¹Предельное распределение величины $x_j = \nu_j/j$ сосредоточено на $[0, \mu]$ для некоторого $0 < \mu < 1$ и имеет особенность $(1 - (x/\mu))^{-1/2}$ вблизи $x = \mu$.

Для собственных функций на n -мерном римановом многообразии можно дать только метрическое описание узловых множеств. Пусть Γ — узловое множество собственных функций шрёдингера (или более общего эллиптического) оператора H . При очень слабых требованиях регулярности коэффициентов оператора H множество Γ имеет конечную $(n - 1)$ -мерную меру Хаусдорфа [19].

Пусть Γ_0 — множество критических точек, лежащих на Γ , и пусть $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$. В этом случае можно получить дополнительную информацию о структуре множеств Γ_0 и Γ_1 . Действительно, из оценок Шаудера следует, что Γ_1 является достаточно гладкой, если коэффициенты H достаточно регулярны. Довольно неожиданно, что для собственной функции φ оператора Шрёдингера гладкость множества Γ_1 на единицу выше гладкости самой функции φ . Например, если потенциал H принадлежит C^α , где $0 < \alpha < 1$, то, согласно классической теореме Шаудера, φ лежит в $C^{2,\alpha}$, однако Γ_1 — класса $C^{3,\alpha}$, как показано в [20]. При $n = 2$ из теоремы Берса 2.2 следует, что Γ_0 дискретно. В размерности n множество Γ_0 имеет локально конечную $(n - 2)$ -мерную меру Хаусдорфа, см. [21], [22].

Интересно оценить $(n - 1)$ -мерную меру всего узлового множества Γ для собственной функции на компактном многообразии (или области). Действительно, такая оценка должна зависеть от собственного значения λ , и можно ожидать, что

$$C^{-1}\sqrt{\lambda} \leq \text{meas}_{n-1} \Gamma \leq C\sqrt{\lambda} \quad (2)$$

для некоторой постоянной $C > 0$. Такая оценка была получена Доннели и Фефферманом [23] (см. также [24], [25]) для n -мерного вещественно-аналитического многообразия; мы не знаем аналогичного результата в гладком случае. При $n = 2$ эта оценка снизу справедлива [26], но наилучшая известная оценка сверху имеет вид ([27])

$$\text{meas}_1 \Gamma \leq C\lambda^{3/4}$$

и, возможно, не является наилучшей.

О топологической структуре узловых множеств известно гораздо меньше, чем об их метрической структуре. Вопросы возникают уже при рассмотрении второй собственной функции задачи Дирихле в плоской области. По теореме 2.1 вторая собственная функция имеет в точности две узловые области. Мелас [28] доказал, что в выпуклой плоской области узловая линия не замкнута, т.е. является отрезком, соединяющим две граничные точки области. Для многосвязной области это уже не так, и узловая линия может быть замкнутой кривой [29], [30]. Очень интересный вопрос — справедлива ли теорема Меласа для любой односвязной плоской области — остается открытым. В частном случае длинных областей геометрия узловых множеств изучена в [31], [32].

2.1. Кратности собственных значений. Пусть M — компактная поверхность с гладкой метрикой g , и пусть $0 < \lambda_1(g) \leq \lambda_2(g) < \dots$ — собственные значения задачи (1). Обозначим через $m_k(g)$ кратность значения $\lambda_k(g)$ и положим

$$m_k(M) = \sup_g m_k(g),$$

где верхняя грань берется по всем римановым метрикам g на M , так что $m_k(M)$ зависит только от топологии M .

Приведенные выше теоремы 2.1 и 2.2 позволяют получить содержательную информацию о числах $m_k(M)$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. Число $m_k(M)$ конечно для всех k и M . Кроме того, для ориентируемой поверхности M_γ рода $\gamma \geq 2$ имеем

$$m_k(M_\gamma) \leq 2k + 4\gamma - 1,$$

в то время как $m_k(S^2) \leq 2k - 1$ при $k \geq 2$ и $m_k(\mathbb{T}^2) \leq 2k + 4$ при $k \geq 1$.

При малых значениях k имеем $m_1(S^2) = 3$, $m_1(\mathbb{T}^2) = 6$, $m_1(\mathbb{RP}^2) = 5$, $m_1(\text{бутылки Клейна}) = 5$, $m_1(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2) = 7$ и $m_2(S^2) = 3$.

Разные части теоремы 2.3 были доказаны в [22] и [33]–[37]. Другие неравенства для неориентируемой поверхности получены в [36], [37]. Аналогичные оценки выполняются для кратностей в задаче Дирихле для плоских областей, см. [38], [39]. С ростом k и рода γ становится очень трудно находить точные значения величин $m_k(M)$. При больших k и γ оценка в теореме 2.3 линейна по k и γ . Однако во всех известных примерах кратность растет как $\sqrt{k}$ и $\sqrt{\gamma}$. Определение правильной скорости роста $m_k(M)$ по k и γ – замечательная нерешенная задача.

Пусть M – n -мерное многообразие, и пусть G – дискретная подгруппа изометрий M . Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k \subset H^1(M)$ – подпространства симметрий, соответствующие неприводимым представлениям G . Тогда A_i инвариантны относительно Δ , и мы можем обозначить собственные значения Δ на A_i через $\lambda_1^i \leq \lambda_2^i \leq \dots$. Пусть размерность i -го неприводимого представления равна l_i , и пусть кратность λ_1^i равна $N_i l_i$. Проблема получения оценки для N_i в зависимости от G и от топологии M и M/G вызывает большой интерес. На самом деле неизвестно даже, существует ли такая оценка для N_i . Первый шаг в этом направлении был сделан в [40]. Для групп диэдра $\mathbb{D}_{2n}$, действующих на двумерном диске, было показано, что все N_i равны 1. Установлены также универсальные неравенства между значениями λ_1^i , $1 \leq i \leq k$. Конечно, случаи с $N_i = 1$ особенно интересны. Это – эквивариантные аналоги того факта, что все λ_1 всегда просты для задачи Дирихле.

§ 3. Собственные функции и их критические точки

Описание геометрии самих собственных функций – более общая задача, чем описание геометрии их узловых множеств. Это – один из фундаментальных вопросов квантовой механики, особенно в случае, когда собственная функция есть основное состояние квантовомеханической системы. Однако очень мало известно даже о более простой задаче о геометрии собственных функций мембраны.

Пусть φ – первая собственная функция задачи Дирихле в ограниченном выпуклом множестве в $\mathbb{R}^n$. Тогда любое множество, ограниченное множествами уровня φ , тоже выпукло [41], см. также [42]. В [43] изучены критические точки собственных функций задачи Неймана, соответствующих первому ненулевому собственному значению для ограниченной плоской области. В частности, доказано, что в выпуклых областях с двумя осями симметрии такая собственная функция имеет в точности две критических точки: верхнюю грань и нижнюю грань, и обе точки лежат на границе. В последнем результате существенны *оба* предположения – и выпуклость, и наличие двух осей симметрии; если они не выполнены, то легко построить контрпример. Например, узкий круговой сектор является выпуклой областью с одной осью симметрии. Однако градиент первой собственной функции обращается в нуль всюду на круговой части границы.

Тем не менее следующая гипотеза выглядит правдоподобной: все критические точки первой собственной функции задачи Неймана в выпуклой плоской области лежат на границе области. В общей многосвязной области эта гипотеза неверна; соответствующие контрпримеры построены в [44], см. также [45], [46].

В [47]–[49] Яо рассматривал вопросы о числе и распределении критических точек собственных функций лапласиана на римановом многообразии. В [50] первый и второй авторы настоящей статьи привели пример метрики на двумерном торе и последовательности собственных функций, для которых соответствующие собственные значения стремятся к бесконечности, но число критических точек остается ограниченным. Это пример дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в [47]; однако метрика довольно специальна, и, может быть, для метрики общего положения число критических точек действительно растет с ростом собственного значения. Основная идея конструкции в [50] состоит в рассмотрении последовательности собственных функций $f_n(x, y) = \sin(nx + y)$ (на $\mathbb{T}^2$ с плоской метрикой), чьи критические точки лежат на объединении двух отрезков прямых, и таком последующем изменении метрики, чтобы вместо двух критических “гребней” мы получили ограниченное число критических точек.

§ 4. Пределы собственных функций

Многие вопросы о поведении собственных функций в пределе при $\lambda \rightarrow \infty$ мотивированы принципом соответствия в квантовой механике. Этот принцип утверждает, что некоторые особенности классической системы проявляются в квазиклассическом пределе (при стремлении постоянной Планка $\hbar$ к нулю) квантования классической системы. Если классическая система есть геодезический поток G^t на римановом многообразии M , то ее квантование есть лапласиан $-\hbar^2 \Delta$ на M . Тогда квазиклассический предел для этой системы есть предел при $\lambda_j \rightarrow \infty$. В этой связи свойства собственных функций с высокими энергиями должны отражать свойства геодезического потока.

Вопрос, привлекий большое внимание, связан с пределами собственных функций. Мы можем сопоставить собственной функции φ_j ее “вероятностную плотность” $d\mu_j = |\varphi_j(x)|^2 dx$ на M (где dx – нормированный риманов объем) и некоторое распределение $d\omega_j$ на S^*M , которое проектируется в $d\mu_j$. Эти меры можно рассматривать как функционалы на пространствах $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{D}(S^*M)$ соответственно. Для данных “наблюдаемых” $f \in \mathcal{D}(M)$ и $a \in \mathcal{D}(S^*M)$ (a рассматривается как однородная функция степени 0 на T^*M) мы выбираем вспомогательный псевдодифференциальный оператор $A = Op(a)$ нулевого порядка с главным символом a и полагаем

$$\begin{aligned} \langle f, d\mu_j \rangle &= \int_M f(x) |\varphi_j(x)|^2 dx, \\ \langle a, d\omega_j \rangle &= \int_M (A\varphi_j)(x) \overline{\varphi_j(x)} dx := \langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Выбор $Op(a)$ не является каноническим, но любые два выбранных оператора отличаются лишь на оператор порядка -1 , а это не влияет на асимптотическое поведение (диагональных) матричных элементов $\langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle$. В случае, если соответствие $a \rightarrow Op(a)$ есть квантование Вейля, распределение $d\omega_j$ называется *мерой Вигнера*, соответствующей φ_j ; иногда рассматриваются другие связанные с этим объекты, так

называемые меры *Хусими* и *Баргмана* (ср. [51]–[55]). Основная задача состоит в изучении множества $\mathcal{L}$ слабых* предельных точек семейства μ_j и множества $\mathcal{U}$ слабых* предельных точек семейства ω_j ; из теоремы Егорова [56] следует, что любая предельная мера в $\mathcal{U}$ инвариантна относительно геодезического потока. Множества $\mathcal{L}$ и $\mathcal{U}$ оказываются совершенно разными для многообразий с интегрируемыми и эргодическими геодезическими потоками.

§ 5. Эргодические геодезические потоки

Следующая красивая теорема описывает пределы собственных функций на многообразиях с эргодическими геодезическими потоками; она показывает, что для подпоследовательности φ_{j_k} собственных функций полной плотности выполняются соотношения $d\mu_{j_k} \rightarrow dx$ и $d\omega_{j_k} \rightarrow d\omega$, где $d\omega$ – мера Лиувилля на S^*M . Различные варианты теоремы 5.1 были доказаны в [57]–[62]. Положим $N(\lambda) = \#\{\lambda_j < \lambda\}$, и пусть $f \in \mathcal{D}(M)$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть M – компактное многообразие, геодезический поток которого эргодичен. Тогда*

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \left| \int_M f |\varphi_j|^2 - \int_M f \right|^2 &= o(N(\lambda)), \\ \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \left| \int_{S^*M} \langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle - \int_{S^*M} a d\omega \right|^2 &= o(N(\lambda)). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство использует теорему Егорова и эргодичность геодезического потока на S^*M .

Можно сказать, что на многообразиях с эргодическими геодезическими потоками *почти все* собственные функции² становятся “равномерно распределенными.” Иногда это явление называется *квантовой эргодичностью*. Теорема 5.1 была распространена Целдичем на гиперболические поверхности конечной площади [63]. Аналогичная теорема была установлена для эргодических бильярдов в [64] и [65]. Частичные обращения результатов теоремы 5.1 были получены в [66] и [67]. Другие результаты, связывающие асимптотику высоких энергий матричных элементов $\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle$ с классической динамикой, можно найти в [68]–[70].

Скорость (или степень) роста суммы в (4) (которую мы обозначим через $S(\lambda)$) называется *степенью квантовой эргодичности*. Для многообразий отрицательной кривизны оценка сверху этой скорости была улучшена с $o(N(\lambda))$ до $O(N(\lambda)/\log \lambda)$ в [71]. Нижние оценки для $S(\lambda)$ рассматривались в [72]. Для гиперболических поверхностей и бильярдов степень квантовой эргодичности изучалась также в [73], [74]; результаты для арифметических гиперболических многообразий обсуждаются в разделе 5.1.

С этим связан и вопрос об изучении асимптотики интегралов $\int \varphi_i^2 \varphi_j$ при $\lambda_j \rightarrow \infty$ или, более общим образом, интегралов

$$I_j = \int P(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_k}) \varphi_j, \quad (5)$$

²Подпоследовательность полной плотности.

где P — многочлен от собственных функций $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_k}$. Сарнак [75] доказал, что

$$I_j = O\left(e^{-\pi\sqrt{\lambda_j}/2}(\lambda_j + 1)^B\right) \quad (6)$$

на n -мерном гиперболическом многообразии (кривизны -1), где B зависит только от n и от степени многочлена P . Он показал также, что соотношение (6) выполняется в среднем для некомпактных гиперболических многообразий конечного объема, если φ_j — (обобщенная) собственная функция, соответствующая точке непрерывного спектра Δ ; Гуд [76], [77] доказал аналогичное утверждение при $n = 2$ и для P , равного квадрату голоморфной параболической формы. В формуле (6) *экспоненциальная* скорость убывания оптимальна; она наиболее важна для многих приложений. *Полиномиальная* же скорость в (6) не оптимальна, и она была улучшена Петридисом в [78], [79]. (Существенно) оптимальные результаты о полиномиальной скорости были получены в [80] для класса таких задач на $M = PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ и в [81] для компактных гиперболических поверхностей.

Есть естественный вопрос: существуют ли на многообразиях с эргодическими геодезическими потоками *исключительные* последовательности φ_{j_l} собственных функций, т.е. такие, что $d\mu_{j_l} \rightarrow d\nu \neq dx$ или $d\omega_{j_l} \rightarrow d\alpha \neq d\omega$; эти последовательности называются *сильными шрамами*. По теореме 5.1 они должны иметь нулевую плотность. ВКБ-построение “квазимод”, сосредоточенных на *устойчивых* замкнутых геодезических (они обсуждаются в § 6, ср. [82]) предполагает, что собственные функции высоких энергий могут быть расположены на *неустойчивых* замкнутых геодезических. Среди других естественных кандидатов на такое расположение — непрерывные семейства замкнутых геодезических (прыгающие шары) в эргодических бильярдах. Такая локализация была исследована в [83]–[108], [10], [52] и других статьях. Однако выглядит правдоподобным, что на многообразиях отрицательной кривизны степень концентрации недостаточна для существования сильных шрамов; нахождение этой степени остается очень интересной задачей.

Рудник и Сарнак [109] высказали гипотезу, что на многообразиях отрицательной кривизны сильных шрамов нет (это условие иногда называют *строгой квантовой эргодичностью* или *квантовой одноэргодичностью*). Подтверждения этой гипотезы можно найти в [87], [88], [110], [111]. Многочисленные результаты, подкрепляющие эту гипотезу, были установлены также для арифметических гиперболических многообразий и описаны ниже.

Помимо того, что сильные шрамы, как правило, отсутствуют, есть еще одно типичное явление: масса собственной функции сосредоточивается вдоль периодических неустойчивых геодезических — по крайней мере при усреднении по большим семействам собственных функций, для которых собственные значения лапласиана λ_j удовлетворяют условию $\lambda_j - \lambda \ll 1/\lambda$. Однако это свойство не является асимптотическим (при $\lambda \rightarrow \infty$) и зависит, в частности, от показателей Ляпунова орбиты. Один из способов нахождения доли массы собственной функции (по крайней мере в среднем), находящейся вблизи данной орбиты, состоит в вычислении вклада этой орбиты в квазиклассическую формулу следа (см. [54], [55]).

Гипотеза случайных волн в квантовом хаосе [94] состоит в том, что собственные функции высоких энергий ведут себя как случайные суперпозиции волн, если классическая система эргодична. Соответственно, в [112] и [113] ожидается, что собственные

функции таких систем имеют локальное гауссово предельное распределение и что их нормы $\|\varphi_\lambda\|_\infty$ растут как $\sqrt{\log \lambda}$. Эти гипотезы изучаются в [68], [69], [87], [88], [94], [102], [105], [111], [114]–[130].

Гипотезы случайных волн соотносят также статистики узловых множеств с распределениями Вигнера (связанными с собственными функциями высоких энергий) со статистиками нулей случайных многочленов. Эти статистики изучались в [114], [117], [118], [121]–[127], [131]–[135].

В [70], [124], [135] было показано, что из квантовой эргодичности следует равномерность распределения нулей голоморфных сечений квантующих векторных расслоений, по крайней мере “почти всюду”. Более точно, пусть M – компактное комплексное многообразие, и пусть (L, h) – положительное эрмитово голоморфное векторное расслоение над M . Шиффман и Целдич [135] изучили распределение нулей голоморфных сечений $s \in H^0(M, L^N)$ при $N \rightarrow \infty$. В частном случае, если $M = \mathbb{C}P^k$ и L – каноническое расслоение, эти сечения как раз являются однородными голоморфными многочленами степени N на $\mathbb{C}^{N+1}$ (см. [124]). Кривизна h , обозначаемая через $\omega = c_1(h)$, есть кэлерова форма, которая, вместе с h , определяет эрмитово скалярное произведение на векторном пространстве $H^0(M, L^N)$. Это скалярное произведение позволяет строго ввести понятие “случайного” голоморфного сечения следующим образом. Образует вероятностное пространство $S = \prod_{N=1}^\infty SH^0(M, L^N)$, где $SH^0(M, L^N)$ – единичная сфера в $H^0(M, L^N)$, и введем меру Хаара $d\mu$ на S как меру-произведение. Положим $Z_{s_N} := \{z \in M; s_N(z) = 0\}$ и, слегка злоупотребляя обозначениями, будем использовать символ Z_{s_N} и для обозначения дуального к нему по Пуанкаре–Лелону элемента $\partial\bar{\partial} \log |s_N|$. Тогда, как доказано в [135], для любого $\phi \in \Omega^{k-1, k-1}(M)$ и для почти всех $\mathbf{s} = \{s_N\} \in S$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_M Z_{s_N} \wedge \phi = \int_M \omega \wedge \phi. \quad (7)$$

Таким образом, сечения $\mathbf{s} = \{s_N\}$, по крайней мере в среднем, равномерно распределены относительно кэлеровой формы ω на M . В [133], [134] для нулей вычислены более сложные статистики.

В случае вещественных многообразий вычисление асимптотики плотности состояний для нулей собственных функций является трудной задачей, и предельное распределение может как существовать, так и не существовать. Однако в случае стандартной сферы $\mathbb{S}^n$ Нойхайзель [136] получил результаты об узловом равномерном распределении, аналогичные (7), для случайных сферических гармоник.

5.1. Арифметические гиперболические многообразия. *Арифметическое гиперболическое многообразие* есть факторпространство гиперболического пространства по арифметической подгруппе Γ группы изометрий G . Напомним, что подгруппа Γ называется *арифметической*, если она имеет большой *соизмеритель* $\text{СОМ}(\Gamma)$, т.е. множество всех таких $\delta \in G$, что группа $\Gamma(\delta) := \delta^{-1}\Gamma\delta \cap \Gamma$ имеет конечный индекс и в Γ , и в $\delta^{-1}\Gamma\delta$. Маргулис [137] показал, что если G полупроста, то Γ арифметична тогда и только тогда, когда $\text{СОМ}(\Gamma)$ плотен в $G(\mathbb{R})$; в противном случае $\text{СОМ}(\Gamma)/\Gamma$ конечен. Элемент $\delta \in \text{СОМ}(\Gamma)$ может быть следующим образом поднят до оператора Гекке T_δ , действующего на $L^2(M)$. Пусть $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma(\delta)\beta_i$, где

$\beta_i \in G$. Тогда

$$T_\delta f(x) = \sum_{i=1}^k f(\delta \beta_i x). \quad (8)$$

В связи с этим на арифметических гиперболических многообразиях имеется бесконечно много операторов Гекке; они коммутируют и с лапласианом, и друг с другом. Приемы аналитической теории чисел можно применить для изучения общих собственных функций оператора Δ и операторов Гекке;³ часто оказывается удобным выбирать в таком виде и *основные* функции. Для собственных функций лапласианов на арифметических гиперболических многообразиях большие успехи достигнуты в изучении вопросов квантовой эргодичности; мы приводим ниже краткий обзор этих результатов. Более подробные обзоры результатов о спектрах высоких энергий и собственных функциях лапласианов для арифметических гиперболических многообразий и связанных с ними результатов теории чисел читатель может найти в [138]–[140].

Гипотеза квантовой строгой эргодичности установлена в работах [141] и [142]⁴ для (обобщенных) собственных функций, соответствующих *непрерывному* спектру Δ на $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. Аналогичные результаты для арифметических гиперболических 3-многообразий были сведены в [144] к некоторым оценкам для L -функций; эти оценки были установлены в [145]. Рудник и Сарнак показали в [109], что на некоторых арифметических гиперболических многообразиях исключительная мера $d\nu$ не может иметь сингулярного носителя, содержащегося в конечном объединении замкнутых геодезических (или вполне геодезических поверхностей). Вольперт [146] показал, что на $\Gamma_0(m) \backslash PSL_2(\mathbb{R})$ любая такая мера с компактным сингулярным носителем равна нулю на любом счетном объединении замкнутых геодезических и геодезических ламинаций (частичных слоений) для подгрупп конечного индекса. Линденштраус [147] изучил предельную меру на $\Gamma \backslash G/K$, где G – полупростая группа Ли⁵ ранга ≥ 2 , K – ее компактная подгруппа и Γ – неприводимая решетка. Его гипотеза состоит в том, что для совместных собственных функций *всех* G -инвариантных дифференциальных операторов справедлив аналог гипотезы квантовой строгой эргодичности, и он выводит свою гипотезу из гипотезы Маргулиса в теории жесткости и распространяет результаты статей [109] и [146] на случай равномерно неприводимых решеток конгруэнций в $PSL_2(\mathbb{R})^n$.

Новое тождество, доказанное Ватсоном [148], позволяет связать скорость роста интеграла $\int_{PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ (где φ_j – собственные функции в $L^2(PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H})$) со специфическим значением некоторой L -функции. С помощью этого тождества квантовая строгая эргодичность была недавно установлена в [140], [149] для “СМ-форм” на $\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$, построенных Маасом и Гекке (см. [150]–[152]). Было также показано, что из улучшения границы “выпуклости” (Фрагмена–Линделефа) для некоторой L -функции

³ Для некомпактных гиперболических поверхностей конечной площади существование собственных функций Δ , принадлежащих L^2 , очень сильно зависит от того, является ли поверхность арифметической; есть гипотеза, что, как правило, на неарифметических поверхностях нет собственных функций, принадлежащих L^2 . Мы здесь не рассматриваем этот вопрос.

⁴ Доказательство использует результаты Гуда [143].

⁵ Без компактных факторов и с конечным центром.

следует квантовая строгая эргодичность для квадратично интегрируемых собственных функций Δ на $PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ (см. [140]). Недавно было показано также, что для некоторых особых (“диэдральных”) собственных форм Гекке на арифметических гиперболических многообразиях M выполняется соотношение $\int |\varphi_\lambda|^4 \rightarrow 3/\text{vol}(M)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Но это значение в точности предсказано гипотезой случайных волн!

Для $M = PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ верхняя граница степени квантовой эргодичности была улучшена в [141], [153] с $o(\lambda)$ до $O_\varepsilon(\lambda^{1/2+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$; здесь $N(\lambda) = c\lambda$. Установленный результат выглядит оптимальной оценкой степени квантовой эргодичности. Область суммирования в [154] для голоморфных собственных форм Гекке была недавно существенно сокращена Луо и Сарнаком [155].

Как известно (см. §7), на n -мерном многообразии имеем $\|\varphi\|_\infty = O(\lambda^{(n-1)/4})$ для $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ с $\|\varphi\|_2 = 1$. Эта граница была улучшена в [156] для арифметических гиперболических поверхностей и в [157] для компактных арифметических гиперболических 3-многообразий. В [138] была высказана гипотеза, что на поверхностях отрицательной кривизны имеем $\|\varphi\|_\infty = O(\lambda^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. В [109] авторы построили последовательность φ_j собственных функций (“тэта-подъем”) на гиперболическом 3-многообразии с $\|\varphi_j\|_\infty > C\lambda_j^{1/4}$.

В то время как присутствие операторов Гекке меняет поведение собственных значений Δ ([154], [158], [159]), оно кажется не влияющим на поведение собственных функций (см. [111], [73], [160]). Таким образом, можно надеяться, что результаты, полученные для совместных собственных функций оператора Δ и операторов Гекке на арифметических гиперболических многообразиях, могут привести к лучшему пониманию поведения собственных функций на других многообразиях отрицательной кривизны.

§ 6. Интегрируемые геодезические потоки

Гамильтонианом для геодезического потока на римановом многообразии (M^n, g) является функция

$$H_0(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|_g^2,$$

где $|\xi|$ обозначает индуцированную длину ковектора $\xi \in T_x^*M$. Функция H_0 называется вполне интегрируемой, если существует $n - 1$ различных функций H_i , $i = 1, \dots, n - 1$, таких, что

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad \forall i, j = 0, \dots, n - 1,$$

и $dH_0, \dots, dH_{n-1}$ линейно независимы на открытом плотном подмножестве в T^*M . Интегрируемость встречается очень редко, но дает много важных примеров, включающих геодезический поток на поверхностях вращения, гиперэллипсоиды, семейства левоинвариантных метрик на группах Ли, семейства нильмногообразий и лиувиллевых метрик на торах⁶ и много других примеров (см. [163]–[165]). Лапласиан $\hat{H}_0 := \Delta$ называется *квантово вполне интегрируемым* (КВИ), если существуют $n - 1$ псевдодифференциальных операторов $\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_{n-1}$ с главными символами $H_1, \dots, H_{n-1}$ (см. выше), удовлетворяющих условиям

$$[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0, \quad \forall i, j = 0, \dots, n - 1.$$

⁶Ср. [161], [162].

Любопытный экспериментальный факт состоит в том, что все известные классически интегрируемые геодезические потоки имеют КВИ-квантования. Однако до настоящего времени в этом направлении не получено строгих результатов. Можно ввести совместный поток на T^*M следующим образом: для любого $t = (t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ и $(x, \xi) \in T^*M$ положим

$$\Phi_t(x, \xi) = \phi_{0,t_0} \circ \dots \circ \phi_{n-1,t_{n-1}}(x, \xi),$$

где $\phi_{i,t}$ обозначает поток гамильтонова векторного поля H_i в момент времени t . Таким образом, кокасательное пространство T^*M расщепляется в объединение орбит совместного потока. Эти орбиты могут быть либо торами, либо цилиндрами, либо копиями пространства $\mathbb{R}^n$. Согласно знаменитому результату Арнольда [166], на плотном в T^*M подмножестве орбиты совместного потока являются лагранжевыми торами (размерности n). Нетрудно показать, что сингулярные орбиты (т.е. компактные орбиты размерности $< n$) являются ω -предельными множествами для совместного потока на множестве уровня $\Sigma_b = \{(x, \xi) \in T^*M; H_0 = b_0, \dots, H_{n-1}(x, \xi) = b_{n-1}\}$, и в [167] доказано, что сингулярные орбиты всегда существуют и что для любых сингулярных орбит $\gamma_1, \dots, \gamma_l \subset \Sigma_b$ существует подпоследовательность $(\psi_{\lambda_j})_{j=1}^\infty$ таких (совместных) собственных функций гамильтонианов $\hat{H}_0, \dots, \hat{H}_{n-1}$, что для некоторых $\alpha_i \geq 0$ с $\sum_i \alpha_i = 1$ выполняется соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle \text{Op}(q)\psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \sum_{i=1}^l \alpha_i \int_{\gamma_i} q. \quad (9)$$

Таким образом, в отличие от эргодических потоков, для КВИ-потоков собственные функции *всегда* сосредоточены вдоль сингулярных орбит.

Кроме того, в соответствующих предположениях невырожденности и нерезонансности относительно сингулярных орбит, Тот [168] получил следующую точную скорость сходимости для масс собственных функций в (9):

$$\langle \text{Op}(q)\psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} q + O(|\log \lambda|^{-1/2}). \quad (10)$$

Доказательство (10) зависит от нормальной формы для перестановочных операторов в окрестности любой сингулярной орбиты. Эта “квантовая нормальная форма Биркгофа” выводится из классической механической теоремы Ито [169] в вещественно-аналитическом случае, а C^∞ -аналог получается из нормальных форм Элиассона; см. [170]. Наконец, тщательное изучение явных микролокальных совместных собственных функций модельных операторов, возникающих в нормальной форме Биркгофа, приводит к результату в (10).

Есть несколько важных примеров вырожденных интегрируемых метрик, к которым результаты в (9) и (10) не могут быть непосредственно применены. Это, в частности:

6.1. Сферы. В [171] было показано, что на $M = S^n$ со стандартной метрикой множество $\mathcal{U}$ (см. § 4) содержит все вероятностные меры на S^*M , инвариантные относительно геодезического потока и обращения времени. Если рассматриваются вещественные собственные функции, то нетрудно показать, что только такие меры могут

возникать как предельные точки, так что на S^n множество $\mathcal{U}$ — наибольшее возможное.

Напротив, в [172] и [173] было показано, что если выбирать базис пространства сферических гармоник степени N случайным образом для всех N , то для почти всех таких выборов полученный базис пространства собственных функций на S^n оказывается *квантово строго эргодическим*.

На S^n можно определить некоторые операторы (как в (8)), действующие на $L^2(S^n)$. В [171] было показано, что при весьма общем выборе g_j совместные собственные функции Δ и T не могут быть локализованы на *одной* замкнутой геодезической. Вандеркам [173] улучшил верхние границы скорости роста L^∞ -норм совместных собственных функций Δ и *арифметических* операторов Гекке (используя технику, введенную в [156]). Он, совместно с Бургеном, привел пример базиса в $L^2(S^n)$, состоящего из сферических гармоник, L^∞ -нормы которых растут логарифмически; неизвестно, существует ли такой базис с *равномерно ограниченными* L^∞ -нормами.

6.2. Торы. Обсудим теперь пределы собственных функций на плоских торах $M = \mathbb{T}^n$. При $n = 2$ легко видеть, что для собственной функции $\varphi(x, y) = e^{2\pi i(mx + ny)}$ соответствующая мера $d\omega_\varphi$ на $S^*(\mathbb{T}^2)$ равна дельта-мере на торе Лиувилля, соответствующем геодезической в направлении $\theta = \arctg(n/m)$; по-видимому, это — простейший пример локализации, обсуждавшейся в начале этого параграфа. Мера $d\mu_\varphi$ есть в точности лебегова мера $dx dy$ на $\mathbb{T}^2$.

Напротив, на *арифметических* плоских торах $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ собственные значения могут иметь сколь угодно большие кратности при $n \geq 2$, соответствующие более сложным мерам $d\mu$.⁷ Их предельное множество $\mathcal{L}$ было изучено в [174]; было показано, что на $\mathbb{T}^2$ все предельные меры в $\mathcal{L}$ имеют плотности, являющиеся тригонометрическими многочленами.⁸ Бурген показал, что для любого n любая мера в $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры; можно показать [174], что предельные плотности на $\mathbb{T}^3$ имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, в то время как на $\mathbb{T}^4$ они лежат в $L^2(\mathbb{T}^4)$. L^p -свойства плотностей слабых* пределов на $\mathbb{T}^n$ при $n \geq 5$ оказываются связанными с возможными обобщениями (или их отсутствием) на высшие размерности ($n = 2$ и $n = 3$) результата Кука и Зигмунда [175]–[177] о равномерной границе величин $\|\varphi\|_4/\|\varphi\|_2$ для собственных функций φ на $\mathbb{T}^2$. Неизвестно, существует ли аналогичная граница для $\|\varphi\|_p/\|\varphi\|_2$ при $p > 2$, $n \geq 4$; Бурген [179] нашел верхние границы для скорости роста этого отношения для $n \geq 4$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Первый автор доказал (слабое) обобщение результатов Кука и Зигмунда в размерностях 3 (см. [174]) и 4; затем последовали результаты о преобразованиях Фурье предельных распределений в размерностях 5 и 6.

Наконец, мы упомянем интересный результат Мокенхаупта [179], построившего такие последовательности φ_j собственных функций на $\mathbb{T}^2$ (например, последовательность с собственными значениями $\lambda_j = q^j$, где $q = 4m + 1$ — фиксированное простое число), что $\|\varphi_j\|_\infty \rightarrow \infty$, но $\|\varphi_j\|_p < C(p) < \infty$ для всех $p < \infty$. Неизвестно, су-

⁷Для собственной функции φ с собственным значением λ плотность меры $d\mu_\varphi$ есть тригонометрический многочлен, чьи частоты являются хордами, связывающими точки решетки на сфере радиуса $\sqrt{\lambda}$ в $\mathbb{R}^n$.

⁸Их ненулевые плотности лежат на (не более чем) *двух* окружностях с центром в начале координат.

существует ли такое $p > 4$, что $\|\varphi\|_p < C(p) < \infty$ для *всех* собственных функций φ на $\mathbb{T}^2$.

§ 7. L^p -нормы

Поведение L^p -норм собственных функций лапласиана на римановом многообразии было предметом активных исследований. Скорость роста L^∞ -норм изучена в [2], [180]–[182]; в [183] и [184] это сделано для многообразий отрицательной кривизны (см. также [109], [139], [156], [160]); Колен де Вердьер [185], [186] и другие авторы исследовали эту скорость для многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками (см. [173], [177], [187]–[190]). Сигер и Содж [191], [192] получили улучшенную верхнюю границу для скорости роста L^p -норм собственных функций. Скорость роста обсуждалась в разделе 5.1 для арифметических гиперболических многообразий и в разделе 6.2 для плоских торов.

Недавно получены результаты о свойствах рекуррентности для геодезических потоков и об L^∞ -границах для собственных функций. Для любого $x \in M$ положим

$$L_x = \{\xi \in S_x^*M; \exp(t\xi) \cdot x = x \text{ для некоторого } t \in \mathbb{R}\}. \quad (11)$$

Точка $x \in M$ называется рекуррентной, если $L_x = S_x^*M$. В недавней работе [193] Содж и Целдич показали, что универсальная L^∞ -оценка Хермандера $O(\lambda^{\frac{n-1}{4}})$ для собственных функций необходимо достигается в рекуррентных точках геодезического потока. Однако существование рекуррентных точек недостаточно для существования подпоследовательности нормированных собственных функций с максимальным ростом равномерной нормы. Однако недавно полученные результаты Тота и Целдича [190] привели к частичному обращению упомянутого выше результата Соджа и Целдича в квантово вполне интегрируемом случае в размерности два. Пусть Δ – КВИ-оператор, и пусть геодезический поток невырожден с особенностями типа Ботта–Морса; предположим, что у геодезического потока есть рекуррентная точка $x \in M$. В [190] доказано, что тогда при $n = 2$ существует подпоследовательность таких собственных функций оператора Лапласа, что

$$\|\phi_\lambda\|_{L^\infty} \gg_\varepsilon \lambda^{\frac{1}{4}-\varepsilon} \quad (12)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Кроме того, показано, что максимизирующие собственные функции достигают этой оценки вблизи рекуррентной точки. Таким образом, в этих случаях достигается произвольная близость к универсальной границе Хермандера. Примеры здесь включают и трехосный эллипсоид, в котором четыре омбилические точки являются рекуррентными.

Другой естественный вопрос, связанный с оценками собственных функций, имеет следующий вид: какое влияние оказывает предельный рост собственных функций на геометрию самого многообразия? В [167] показано, что если Δ – КВИ и спектр имеет ограниченную кратность, то из оценки

$$\sup_{\lambda \in \text{Spec}(\Delta)} \|\phi_\lambda\|_{L^\infty} = O(1) \quad (13)$$

следует, что

$$(M, g) \text{ — плоский тор.}$$

В настоящее время неизвестно, верна ли эта импликация в общем случае. При подходящих ограничениях невырожденности и нерезонансности в [190] доказано, что результат в (13) может быть несколько ослаблен: если L^2 -нормированные совместные собственные функции ϕ_λ удовлетворяют условию

$$\|\phi_\lambda\|_{L^\infty} = O(\lambda^{1/8-\varepsilon})$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, то отсюда уже следует, что (M, g) — плоский тор. Эти результаты о жесткости можно также получить, предполагая выполненными некоторые нижние L^p -оценки при $p < \infty$. Наконец, есть связанные с этим недавние результаты Доннели [194] о минимальном росте норм собственных функций в случае, когда метрика не обязательно интегрируема, но допускает изометрическое $\mathbb{S}^1$ -сечение. Показано, что в этом случае существует подпоследовательность собственных функций, равномерные нормы которых удовлетворяют условию $O(\lambda^{1/8})$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

§ 8. Свойства квазисимметрии собственных функций

В связи с предсказаниями гипотезы случайных волн в квантовом хаосе (обсужденными в § 5) естественно исследовать связь между положительными и отрицательными частями вещественных собственных функций на римановых многообразиях. В частности, естественно рассматривать отношение $\|\varphi_+\|_p / \|\varphi_-\|_p$ L^p -норм положительной части φ_+ и отрицательной части φ_- собственной функции φ . В [195] доказано, что при $p = \infty$ это отношение отделено от нуля и от бесконечности постоянными, зависящими только от многообразия (и не зависящими от собственного значения). В [196] этот результат распространен на случай любого $1 \leq p < \infty$.⁹ Точное значение постоянной C при $p = \infty$ рассматривалось в [197]. Аналогичные вопросы на S^n изучались в [198]. Неясно, верно ли, что $\|\varphi_+\|_p / \|\varphi_-\|_p \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для $1 < p < \infty$ на данном многообразии. Можно показать [196], что зональные сферические гармоники дают пример последовательности собственных функций с $\|\varphi_+\|_\infty / \|\varphi_-\|_\infty > C > 1$.

В [195] второй автор рассматривал также эту задачу в областях $M_+ = \{x \in M : \varphi(x) > 0\}$ и $M_- = \{x \in M : \varphi(x) < 0\}$ для вещественно-аналитического двумерного M и доказал, что отношение $\text{Vol}(M_+) / \text{Vol}(M_-)$ отделено от нуля и бесконечности постоянными, зависящими только от M . Было бы очень интересно распространить этот результат на более общую ситуацию. Блум, Гнуцман и Смилански получили в [16] с помощью теории случайных волн предсказание скорости роста дисперсии $(\text{Vol}(M_+) - \text{Vol}(M_-))^2$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и сравнили это предсказание с численными результатами для эргодических плоских бильярдов.

Авторы хотели бы поблагодарить Бекера, Доннели, Гийемина, Петридиса, Рудника, Смилански, Сарнака и Целдича за стимулирующие обсуждения. Авторы хотели бы также поблагодарить Хюртюбиз и Пеллетье из Центра математических исследований в Монреале за помощь в организации школы по спектральным статистикам и собственным состояниям высоких энергий в Центре математических исследований в августе 2001 года.

⁹При $p = 1$ это отношение равно 1, поскольку $\int \varphi = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Deift. Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann–Hilbert approach. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999. (Courant Lect. Notes Math. V. 3.)
- [2] J. Duistermaat, V. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics // *Invent. Math.* 1975. V. 29. P. 39–79.
- [3] V. Guillemin. Some classical theorems in spectral theory revisited // *Ann. of Math. Stud.* 1979. V. 91. P. 219–259.
- [4] V. Guillemin. Lectures on spectral theory of elliptic operators // *Duke Math. J.* 1977. V. 44. №3. P. 485–517.
- [5] S. Zelditch. Lectures on wave invariants // *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 1999. V. 273. P. 284–328.
- [6] J. Bellissard, O. Bohigas, G. Casati, D. Shepelyansky (eds.). Classical Chaos and its Quantum Manifestations. Papers from the Sputnik Conference of STATPHYS 20 held in honor of Boris Chirikov in Toulouse, 1998. Amsterdam: North-Holland, 1999. (Phys. D. V. 131. № 1–4.)
- [7] G. Casati, B. Chirikov (eds.). Quantum Chaos. Between Order and Disorder. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [8] K. Efetov. Supersymmetry in Disorder and Chaos. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [9] M.-J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin (eds.). Chaos et physique quantique. Amsterdam: North-Holland, 1991.
- [10] M. Gutzwiller. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1990. (Interdiscip. Appl. Math. V. 1.)
- [11] E. F. Chladni. Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig: Weidmanns Erben und Reich, 1787.
- [12] D. Ullmann. Chladni und die Entwicklung der Akustik von 1750–1860. Basel: Birkhäuser, 1996. (Sci. Networks Hist. Stud. V. 19.)
- [13] J. Rayleigh. The Theory of Sound. London: Macmillan, 1926 (1st ed., 1877).
- [14] R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics. V. I. New York: Interscience Publ., 1953.
- [15] E. Pleijel. Remarks on Courant’s nodal line theorem // *Comm. Pure Appl. Math.* 1956. V. 9. P. 543–550.
- [16] G. Blum, S. Gnutzman, U. Smilansky. Nodal domains statistics – a criterion for quantum chaos // Preprint, 2001, nlin.CD/0109029.
- [17] H. Lewy. On the minimum number of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere // *Comm. Partial Differential Equations.* 1977. V. 2. №12. P. 1233–1244.
- [18] L. Bers. Local behaviour of solutions of general linear equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1955. V. 8. P. 473–496.
- [19] R. Hardt, L. Simon. Nodal sets for solutions of elliptic equations // *J. Differential Geom.* 1989. V. 30. №2. P. 505–522.
- [20] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. Interior Hölder estimates for solutions of Schrödinger equations and the regularity of nodal sets // *Comm. Pure Appl. Math.* 1995. V. 20. №7–8. P. 1241–1273.
- [21] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. Critical sets of smooth solutions of elliptic equations in dimension 3 // *Indiana Univ. Math. J.* 1996. V. 45. P. 15–37.
- [22] R. Hardt, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. Critical sets of solutions to elliptic equations // *J. Differential Geom.* 1999. V. 51. №2. P. 359–373.
- [23] H. Donnelly, C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds // *Invent. Math.* 1988. V. 93. №1. P. 161–183.

- [24] H. Donnelly, C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions: Riemannian manifolds with boundary // *Analysis, et cetera. Res. papers in honor of J. Moser's 60-th birthday*. Boston, MA: Academic Press, 1990. P. 251–262.
- [25] Н. С. Надирашвили. О длине узловой линии собственной функции оператора Лапласа // *УМН*. 1988. Т. 43. № 4. С. 219–220.
- [26] J. Brüning. Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace–Beltrami-Operators // *Math. Z.* 1978. V. 158. P. 15–21.
- [27] H. Donnelly, C. Fefferman. Nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on surfaces // *J. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 3. № 2. P. 333–353.
- [28] A. Melas. On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$ // *J. Differential Geom.* 1992. V. 35. № 1. P. 255–263.
- [29] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. The nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$ can be closed // *Duke Math. J.* 1997. V. 90. № 3. P. 631–640.
- [30] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. On the nodal line conjecture // *Contemp. Math.* 1998. V. 217. P. 33–48.
- [31] D. Grieser, D. Jerison. Asymptotics of the first nodal line of a convex domain // *Invent. Math.* 1996. V. 125. № 2. P. 197–219.
- [32] D. Jerison. The diameter of the first nodal line of a convex domain // *Ann. of Math. (2)*. 1995. V. 141. № 1. P. 1–33.
- [33] G. Besson. On the multiplicity of the eigenvalues of the Laplacian // *Lecture Notes in Math.* 1988. V. 1339. P. 32–53.
- [34] S. Y. Cheng. Eigenfunctions and nodal sets // *Comment. Math. Helv.* 1976. V. 51. P. 43–55.
- [35] Y. Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien // *Comment. Math. Helv.* 1986. V. 61. P. 254–270.
- [36] Н. С. Надирашвили. Кратные собственные значения оператора Лапласа // *Матем. сб.* 1987. Т. 133 (175). № 2 (6). С. 223–237.
- [37] B. Sévenec. Multiplicité du spectre des surfaces: Une approche topologique // *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*. V. 12. Année 1993–1994. Chambéry: Univ. de Savoie, 1994. P. 29–36.
- [38] Н. С. Надирашвили. О кратности собственных значений задачи Неймана // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 286. № 6. С. 1303–1305.
- [39] T. Hoffmann-Ostenhof, P. Michor, N. Nadirashvili. Bounds on the multiplicity of eigenvalues of fixed membrane // *Geom. Funct. Anal.* 1999. V. 9. P. 1169–1188.
- [40] B. Helffer, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. Spectral theory for the dihedral group // *Preprint*, 2000.
- [41] H. Brascamp, E. Lieb. On extensions of the Brunn–Minkowski and Prékopa–Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation // *J. Funct. Anal.* 1976. V. 22. P. 366–389.
- [42] B. Kawohl. *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*. Berlin: Springer-Verlag, 1985. (Lecture Notes in Math. V. 1150.)
- [43] D. Jerison, N. Nadirashvili. The “hot spots” conjecture for domains with two axes of symmetry // *J. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 13. № 4. P. 741–772.
- [44] K. Burdzy, W. Werner. A counterexample to the “hot spots” conjecture // *Ann. of Math. (2)*. 1999. V. 149. № 1. P. 309–317.
- [45] R. Banuelos, K. Burdzy. On the “hot spots” conjecture of J. Rauch // *J. Funct. Anal.* 1999. V. 164. P. 1–33.
- [46] R. Bass, K. Burdzy. Fiber Brownian motion and the “hot spots” problem // *Duke Math. J.* 2000. V. 105. P. 25–58.
- [47] S. T. Yau. Problem section of the seminar on differential geometry at Tokyo // *Ann. of Math. Stud.* 1982. V. 102. P. 669–706.
- [48] S. T. Yau. Open problems in geometry. *Differential geometry: partial differential equations on manifolds* // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1993. V. 54. P. 1–28.

- [49] S. T. Yau. A note on the distribution of critical points of eigenfunctions // Tsing Hua Lectures on Geometry and Analysis / ed. S. T. Yau. Cambridge: International Press, 1997. P. 315–317.
- [50] D. Jakobson, N. Nadirashvili. Eigenfunctions with few critical points // J. Differential Geom. 1999. V. 53. P. 177–182.
- [51] A. Ozorio de Almeida. Hamiltonian systems: chaos and quantization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [52] A. Ozorio de Almeida. The Weyl representation in classical and quantum mechanics // Phys. Rep. 1998. V. 295. № 6. P. 265–342.
- [53] A. Voros. Wentzel–Kramers–Brillouin method in the Bargmann representation // Phys. Rev. A (3). 1989. V. 40. № 12. P. 6814–6825.
- [54] T. Paul, A. Uribe. On the pointwise behavior of semi-classical measures // Comm. Math. Phys. 1996. V. 175. P. 229–258.
- [55] T. Paul, A. Uribe. Weighted trace formula near a hyperbolic trajectory and complex orbits // J. Math. Phys. 1998. V. 39. № 8. P. 4009–4015.
- [56] Ю. В. Егоров. О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов // УМН. 1969. Т. 24. № 5. С. 235–236.
- [57] А. И. Шнирельман. Эргодические свойства собственных функций // УМН. 1974. Т. 29. № 6. С. 181–182.
- [58] A. Shnirelman. On the Asymptotic Properties of Eigenfunctions in the Regions of Chaotic Motions. Addendum to V. F. Lazutkin's book. KAM Theory and Semiclassical Approximations. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [59] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces // Duke Math. J. 1987. V. 55. P. 919–941.
- [60] S. Zelditch. Quantum ergodicity of C^* dynamical systems // Comm. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 507–528.
- [61] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien // Comm. Math. Phys. 1985. V. 102. P. 497–502.
- [62] B. Helffer, A. Martinez, D. Robert. Ergodicité et limite semi-classique // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109. № 2. P. 313–326.
- [63] S. Zelditch. Mean Lindelöf hypothesis and equidistribution of cusp forms and Eisenstein series // J. Funct. Anal. 1991. V. 97. P. 1–49.
- [64] P. Gérard, E. Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem // Duke Math. J. 1993. V. 71. № 2. P. 559–607.
- [65] S. Zelditch, M. Zworski. Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards // Comm. Math. Phys. 1996. V. 175. P. 673–682.
- [66] T. Sunada. Quantum ergodicity // Progress in Inverse Spectral Geometry / ed. S. I. Andersson et al. Basel: Birkhäuser, 1997. P. 175–196. (Trends Math.)
- [67] S. Zelditch. Quantum mixing // J. Funct. Anal. 1996. V. 140. P. 68–86.
- [68] E. Heller, L. Kaplan. Weak quantum ergodicity // Phys. D. 1998. V. 121. № 1–2. P. 1–18.
- [69] S. Zelditch. Appendix to: “Weak quantum ergodicity” by L. Kaplan, E. Heller // Phys. D. 1998. V. 121. № 1–2. P. 19–23.
- [70] S. Zelditch. Szegő kernels and a theorem of Tian // Internat. Math. Res. Notices. 1998. № 6. P. 317–331.
- [71] S. Zelditch. On the rate of quantum ergodicity. I: Upper bounds // Comm. Math. Phys. 1994. V. 160. P. 81–92.
- [72] S. Zelditch. On the rate of quantum ergodicity, II. Lower bounds // Comm. Partial Differential Equations. 1994. V. 19. P. 1565–1579.
- [73] R. Aurich, M. Taglieber. On the rate of quantum ergodicity on hyperbolic surfaces and for billiards // Phys. D. 1998. V. 118. № 1–2. P. 84–102.
- [74] A. Bäcker, R. Schubert, P. Stifter. Rate of quantum ergodicity in Euclidean billiards. Part A // Phys. Rev. E (3). 1998. V. 57. № 5. P. 5425–5447; Erratum *ibid.* V. 58. № 4. P. 5192.

- [75] P. Sarnak. Integrals of products of eigenfunctions // *Internat. Math. Res. Notices*. 1994. №6. P. 251–260.
- [76] A. Good. Beiträge zur Theorie der Dirichletreihen, die Spitzenformen zugeordnet sind // *J. Number Theory*. 1981. V. 13. P. 18–65.
- [77] A. Good. Cusp forms and eigenfunctions of the Laplacian // *Math. Ann.* 1981. V. 255. P. 523–548.
- [78] Y. Petridis. On squares of eigenfunctions for the hyperbolic plane and a new bound on certain L -series // *Internat. Math. Res. Notices*. 1995. №3. P. 111–127.
- [79] Y. Petridis. Fourier coefficients of cusp forms // *Number Theory* / ed. R. Gupta et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 297–307. (CRM Proc. Lecture Notes. V. 19.)
- [80] M. Jutila. The additive divisor problem and its analogs for Fourier coefficients of cusp forms. II // *Math. Z.* 1997. V. 225. P. 625–637.
- [81] J. Bernstein, A. Reznikov. Analytic continuation of representations and estimates of automorphic forms // *Ann. of Math.* (2). 1999. V. 150. P. 329–352; Announced in: Sobolev norms of automorphic functionals and Fourier coefficients of cusp forms // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1998. V. 327. P. 111–116.
- [82] V. Babich, V. Lazutkin. Eigenfunctions concentrated near a closed geodesic // *Topics in Math. Phys.* / ed. M. Sh. Birman. V. 2. New York: Consultants Bureau, 1968. P. 9–18.
- [83] O. Agam, B. Eckhardt, S. Fishman, J. Keating, J. Main, K. Müller. Approach to ergodicity in quantum wave functions // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 52. P. 5893–5903.
- [84] O. Agam, S. Fishman. Quantum eigenfunctions in terms of periodic orbits of chaotic systems // *J. Phys. A*. 1993. V. 26. P. 2113–2137; Corrigendum *ibid.* P. 6595.
- [85] O. Agam, S. Fishman. Semiclassical criterion for scars in wave functions of chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 73. №6. P. 806–809.
- [86] R. Aurich, F. Steiner. Temporal quantum chaos // *Internat. J. Modern Phys. B*. 1999. V. 13. №18. P. 2361–2369.
- [87] R. Aurich, F. Steiner. Quantum eigenstates of a strongly chaotic system and the scar phenomenon. Decidability and predictability in the theory of dynamical systems // *Chaos Solitons Fractals*. 1995. V. 5. №2. P. 229–255.
- [88] R. Aurich, F. Steiner. Exact theory for the quantum eigenstates of a strongly chaotic system // *Phys. D*. 1991. V. 48. №2–3. P. 445–470.
- [89] O. M. Auslaender, S. Fishman. Exact eigenfunctions of a chaotic system // *Phys. D*. 1999. V. 128. №2–4. P. 180–223.
- [90] A. Bäcker, R. Schubert. Chaotic eigenfunctions in momentum space // *J. Phys. A*. 1999. V. 32. №26. P. 4795–4815.
- [91] A. Bäcker, R. Schubert, P. Stifter. On the number of bouncing ball modes in billiards // *J. Phys. A*. 1997. V. 30. №19. P. 6783–6795.
- [92] Y. Y. Bai, G. Hose, K. Stefański, H. S. Taylor. Born–Oppenheimer adiabatic mechanism for regularity of states in the quantum stadium billiard // *Phys. Rev. A* (3). 1985. V. 31. №5. P. 2821–2826.
- [93] N. Balazs, M. Berry. Evolution of semiclassical quantum states in phase space // *J. Phys. A*. 1979. V. 12. №5. P. 625–642.
- [94] M. Berry. Regular and irregular semiclassical wavefunctions // *J. Phys. A*. 1977. V. 10. P. 2083–2091.
- [95] M. Berry. Semi-classical mechanics in phase space: A study of Wigner's function // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*. 1977. V. 287. №1343. P. 237–271.
- [96] M. Berry. Quantum scars of classical closed orbits in phase space // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*. 1989. V. 423. №1864. P. 219–231.
- [97] M. Berry. Fringes decorating anticaustics in ergodic wave-functions // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*. 1989. V. 424. №1867. P. 279–288.
- [98] M. Berry, J. Hannay, A. Ozorio de Almeida. Intensity moments of semiclassical wavefunctions // *Phys. D*. 1983. V. 8. №1–2. P. 229–242.
- [99] E. Bogomolny. Smoothed wave functions of chaotic quantum systems // *Phys. D*. 1988. V. 31. №2. P. 169–189.

- [100] S. Fishman, B. Georgeot, R. E. Prange. Fredholm method for scars // J. Phys. A. 1996. V. 29. № 4. P. 919–937.
- [101] E. Heller. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems: scars of periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. № 16. P. 1515–1518.
- [102] E. Heller. Wavepacket dynamics and quantum chaos // Chaos et physique quantique. Amsterdam: North-Holland, 1991. P. 547–664.
- [103] E. Heller, L. Kaplan. Measuring scars of periodic orbits // Phys. Rev. E (3). 1999. V. 59. № 6. P. 6609–6628.
- [104] E. Heller, L. Kaplan. Linear and nonlinear theory of eigenfunction scars // Ann. Physics. 1998. V. 264. № 2. P. 171–206.
- [105] S. W. McDonald, A. N. Kaufman. Wave chaos in the stadium: statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation // Phys. Rev. A (3). 1988. V. 37. № 8. P. 3067–3086.
- [106] A. Ozorio de Almeida. The Wigner function for two-dimensional tori: uniform approximation and projections // Ann. Physics. 1983. V. 145. № 1. P. 100–115.
- [107] T. Prozen. Quantization of generic chaotic 3D billiard with smooth boundary. II: Structure of high-lying eigenstates // Phys. Lett. A. 1997. V. 233. № 4–6. P. 332–342.
- [108] G. Tanner. How chaotic is the stadium billiard? A semiclassical analysis // J. Phys. A. 1997. V. 30. № 8. P. 2863–2888.
- [109] Z. Rudnick, P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds // Comm. Math. Phys. 1994. V. 161. P. 195–213.
- [110] E. Bogomolny, B. Georgeot, M.-J. Giannoni, C. Schmit. Arithmetical chaos // Phys. Rep. 1997. V. 291. № 5–6. P. 219–324.
- [111] D. Hejhal, B. Rackner. On the topography of Maass waveforms for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ // Experiment. Math. 1992. V. 1. № 4. P. 275–305.
- [112] J. P. Kahane. Some Random Series of Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. (Cambridge Stud. Adv. Math. V. 5.)
- [113] R. Salem, A. Zygmund. Some properties of trigonometric series whose terms have random signs // Acta Math. 1954. V. 91. P. 245–301.
- [114] R. Aurich, F. Steiner. Statistical properties of highly excited quantum eigenstates of a strongly chaotic system // Phys. D. 1993. V. 64. № 1–3. P. 185–214.
- [115] M. Berry, R. Mondragon. The quantum phase 2-form near degeneracies: two numerical studies // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1989. V. 424. № 1867. P. 263–278.
- [116] M. Berry, M. Robnik. Quantum states without time-reversal symmetry: wavefront dislocations in a nonintegrable Aharonov–Bohm billiard // J. Phys. A. 1986. V. 19. № 8. P. 1365–1372.
- [117] E. Bogomolny, O. Bohigas, P. Leboeuf. Quantum chaotic dynamics and random polynomials // J. Statist. Phys. 1996. V. 85. № 5–6. P. 639–679.
- [118] J. Hannay. The chaotic analytic function // J. Phys. A. 1998. V. 31. № 49. P. L755–L761.
- [119] S. Hortikar, M. Srednicki. Random matrix elements and eigenfunctions in chaotic systems // Phys. Rev. E (3). 1998. V. 57. № 6. P. 7313–7316.
- [120] P. Leboeuf. Random analytic chaotic eigenstates // J. Statist. Phys. 1999. V. 95. № 3–4. P. 651–664.
- [121] P. Leboeuf, P. Shukla. Universal fluctuations of zeros of chaotic wavefunctions // J. Phys. A. 1996. V. 29. № 16. P. 4827–4835.
- [122] P. Leboeuf, A. Voros. Chaos-revealing multiplicative representation of quantum eigenstates // J. Phys. A. 1990. V. 23. № 10. P. 1765–1774.
- [123] P. Leboeuf, A. Voros. Quantum nodal points as fingerprints of classical chaos // Quantum Chaos. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 507–533.
- [124] S. Nonnenmacher, A. Voros. Chaotic eigenfunctions in phase space // J. Statist. Phys. 1998. V. 92. P. 431–518.
- [125] F. Toscano, A. Ozorio de Almeida. Geometrical approach to the distribution of zeros for the Husimi function // J. Phys. A. 1999. V. 32. № 35. P. 6321–6346.

- [126] T. Prozen. Parametric statistics of zeros of Husimi representations of quantum chaotic eigenstates and random polynomials // J. Phys. A. 1996. V. 29. № 17. P. 5429–5440.
- [127] P. Shukla. On the distribution of zeros of chaotic wavefunctions // J. Phys. A. 1997. V. 30. № 18. P. 6313–6326.
- [128] M. Srednicki, F. Stiernelof. Gaussian fluctuations in chaotic eigenstates // J. Phys. A. 1996. V. 29. № 18. P. 5817–5826.
- [129] J.-M. Tualle, A. Voros. Normal modes of billiards portrayed in the stellar (or nodal) representation // Chaos Solitons Fractals. 1995. V. 5. № 7. P. 1085–1102.
- [130] S. Zelditch. A random matrix model for quantum mixing // Internat. Math. Res. Notices. 1996. № 3. P. 115–137.
- [131] P. Bérard. Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien // Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Année 1984–1985. Exp. IV. Chambéry: Univ. de Savoie, 1985.
- [132] P. Bleher, X. Di. Correlations between zeros of a random polynomial // J. Statist. Phys. 1997. V. 88. № 1–2. P. 269–305.
- [133] P. Bleher, B. Shiffman, S. Zelditch. Universality and scaling of correlations between zeros on complex manifolds // Invent. Math. 2000. V. 142. № 2. P. 351–395.
- [134] P. Bleher, B. Shiffman, S. Zelditch. Poincaré–Lelong approach to universality and scaling of correlations between zeros // Comm. Math. Phys. 2000. V. 208. № 3. P. 771–785.
- [135] B. Shiffman, S. Zelditch. Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles // Comm. Math. Phys. 1999. V. 200. № 3. P. 661–683.
- [136] J. Neuheisel. The asymptotic distribution of nodal sets on spheres // Thesis. Baltimore: Johns Hopkins University, 2000.
- [137] Г. А. Маргулис. Арифметические свойства дискретных подгрупп // УМН. 1974. Т. 29. № 1. С. 49–98.
- [138] P. Sarnak. Arithmetic quantum chaos // Israel Math. Conf. Proc. 1995. V. 8. P. 183–236.
- [139] P. Sarnak. Spectra and eigenfunctions of Laplacians // Partial Differential Equations and their Applications / ed. P. C. Greiner et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 261–276. (CRM Proc. Lecture Notes. V. 12.)
- [140] H. Iwaniec, P. Sarnak. Perspectives on the analytic theory of L -functions // Geom. Funct. Anal. Special volume. 2000. P. 705–741.
- [141] W. Luo, P. Sarnak. Quantum ergodicity of eigenfunctions on $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash H^2$ // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1995. V. 81. P. 207–237.
- [142] D. Jakobson. Quantum unique ergodicity for Eisenstein series on $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1994. V. 44. № 5. P. 1477–1504.
- [143] A. Good. The square mean of Dirichlet series associated with cusp forms // Mathematika. 1982. V. 29. № 2. P. 278–295.
- [144] S. Koyama. Quantum ergodicity of Eisenstein series for arithmetic 3-manifolds // Comm. Math. Phys. 2000. V. 215. № 2. P. 477–486.
- [145] Y. Petridis, P. Sarnak. Quantum unique ergodicity for $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \backslash \mathbb{H}^3$ and estimates for L -functions // J. Evolution Equations. 2001. V. 1. P. 277–290.
- [146] S. Wolpert. The modulus of continuity for $\Gamma_0(m) \backslash \mathbb{H}$ semi-classical limits // Comm. Math. Phys. 2001. V. 216. № 2. P. 313–323.
- [147] E. Lindenstrauss. On quantum unique ergodicity for $\Gamma \backslash \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ // Preprint, 2000; <http://math.Stanford.EDU/~elonl/Publications/que.ps>.
- [148] T. Watson. Central value of the Rankin triple L -function for unramified Maass cuspforms // Thesis. Princeton: Princeton Univ., 2001.
- [149] P. Sarnak. Estimates for Rankin–Selberg L -functions and quantum unique ergodicity // J. Funct. Anal. 2001. V. 184. P. 419–453.
- [150] H. Maass. Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen // Math. Ann. 1949. V. 121. P. 141–183.
- [151] E. Hecke. Über modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklungen. I, II // Math. Ann. 1937. V. 114. P. 1–28, 316–351.

- [152] E. Hecke. Lectures on Dirichlet series, modular functions and quadratic forms. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1983 (reprint of the 1938 edition).
- [153] D. Jakobson. Equidistribution of cusp forms on $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1997. V. 47. № 3. P. 967–990.
- [154] W. Luo, P. Sarnak. Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces // Comm. Math. Phys. 1994. V. 161. № 2. P. 419–432.
- [155] W. Luo, P. Sarnak. Mass equidistribution for Hecke eigenforms // Preprint, 2001.
- [156] H. Iwaniec, P. Sarnak. L^∞ norms of eigenfunctions on arithmetic surfaces // Ann. of Math. (2). 1995. V. 141. P. 301–320.
- [157] S. Koyama. L^∞ -norms on eigenfunctions for arithmetic hyperbolic 3-manifolds // Duke Math. J. 1995. V. 77. P. 799–817.
- [158] E. Bogomolny, F. Leyvraz, C. Schmit. Distribution of eigenvalues for the modular group // Comm. Math. Phys. 1996. V. 176. № 3. P. 577–617.
- [159] G. Steil. Eigenvalues of the Laplacian for Bianchi groups // IMA Vol. Math. Appl. 1999. V. 109. P. 617–641.
- [160] R. Aurich, A. Bäcker, R. Schubert, M. Taglieber. Maximum norms of chaotic quantum eigenstates and random waves // Phys. D. 1999. V. 129. № 1–2. P. 1–14.
- [161] P. Bleher, D. Kosygin, Y. Sinai. Distribution of energy levels of quantum free particle on the Liouville surface and trace formulae // Comm. Math. Phys. 1995. V. 170. P. 375–403.
- [162] Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай. Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 3–130.
- [163] L. Butler. Integrable geodesic flows on n -step nilmanifolds // J. Geom. Phys. 2000. V. 36. № 3–4. P. 315–323.
- [164] G. J. Heckman. Quantum integrability for the Kovalevsky top // Indag. Math. (N.S.). 1998. V. 9. № 3. P. 359–365.
- [165] J. Toth. Various quantum mechanical aspects of quadratic forms // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 1–42.
- [166] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [167] J. Toth, S. Zelditch. Riemannian manifolds with uniformly bounded eigenfunctions // Duke Math. J. 2002 (to appear).
- [168] J. Toth. Quantum expected values for integrable metric forms // J. Differential Geom. 1999. V. 52. P. 327–374.
- [169] H. Ito. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems // Comment. Math. Helv. 1989. V. 64. P. 412–461.
- [170] S. Vu Ngoc. Bohr–Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type // Comm. Pure Appl. Math. 2000. V. 53. № 2. P. 143–217.
- [171] D. Jakobson, S. Zelditch. Classical limits of eigenfunctions for some completely integrable systems // IMA Vol. Math. Appl. 1999. V. 109. P. 329–355.
- [172] S. Zelditch. Quantum ergodicity on the sphere // Comm. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 61–71.
- [173] J. VanderKam. L^∞ norms and quantum ergodicity on the sphere // Internat. Math. Res. Notices. 1997. № 7. P. 329–347; Correction *ibid.* 1998. № 1. P. 65–66.
- [174] D. Jakobson. Quantum limits on flat tori // Ann. of Math. (2). 1997. V. 145. № 2. P. 235–266; Announced in Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 1. № 2. P. 80–86.
- [175] R. Cooke. The Cantor–Lebesgue theorem // Amer. Math. Monthly. 1979. V. 86. № 7. P. 558–565.
- [176] R. Cooke. A Cantor–Lebesgue theorem in two dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30. P. 547–550.
- [177] A. Zygmund. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables // Studia Math. 1974. V. 50. P. 189–201.
- [178] J. Bourgain. Eigenfunction bounds for the Laplacian on the n -torus // Internat. Math. Res. Notices. 1993. V. 3. P. 61–66.

- [179] G. Mockenhaupt. Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators // Habilitationsschrift. Siegen: Univ. Siegen, 1996.
- [180] L. Hörmander. The spectrum of a positive elliptic operator // Acta Math. 1968. V. 121. P. 193–218.
- [181] A. Volovoy. Improved two term asymptotics for the eigenvalue distribution function // Comm. Partial Differential Equations. 1990. V. 15. P. 1509–1563.
- [182] V. Ivrii. Spectral asymptotics with highly accurate remainder estimates // Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1989–1990. Exp. VI. Palaiseau: École Polytechnique, 1990.
- [183] P. Bérard. On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points // Math. Z. 1977. V. 155. P. 249–276.
- [184] H. Donnelly. On the wave equation asymptotics of a compact negatively curved surface // Invent. Math. 1978. V. 45. P. 115–137.
- [185] Y. Colin de Verdière. Quasi-modes sur les variétés riemanniennes // Invent. Math. 1977. V. 43. P. 15–52.
- [186] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II: Le cas intégrable // Math. Z. 1980. V. 171. P. 51–73.
- [187] J. Bourgain. Eigenfunction bounds for compact manifolds with integrable geodesic flow // Preprint. Paris: Institute des Hautes Études Scientifique, 1993.
- [188] J. Toth. Eigenfunction Localization in the quantized rigid-body // J. Differential Geom. 1996. V. 43. P. 844–858.
- [189] J. Toth. Eigenfunction decay estimates in the quantum integrable case // Duke Math. J. 1998. V. 93. P. 231–255.
- [190] J. Toth, S. Zelditch. L^p -norms for eigenfunctions of integrable metrics // Preprint, 2001.
- [191] A. Seeger, C. Sogge. Bounds for eigenfunctions of differential operators // Indiana Univ. Math. J. 1989. V. 38. № 3. P. 669–682.
- [192] C. Sogge. Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds // J. Funct. Anal. 1988. V. 77. № 1. P. 123–138.
- [193] C. Sogge, S. Zelditch. Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth // Preprint. Baltimore: Johns Hopkins Univ., 2001.
- [194] H. Donnelly. Bounds for eigenfunctions of the Laplacian on compact Riemannian manifolds // Preprint, 2001.
- [195] N. Nadirashvili. Metric properties of eigenfunctions of the Laplace operator on manifolds // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1991. V. 41. № 1. P. 259–265.
- [196] D. Jakobson, N. Nadirashvili. Quasi-symmetry of L^p norms of eigenfunctions // Comm. Anal. Geom. (to appear).
- [197] P. Kröger. On the ranges of eigenfunctions on compact manifolds // Bull. London Math. Soc. 1998. V. 30. P. 651–655.
- [198] D. Armitage. Spherical extrema of harmonic polynomials // J. London Math. Soc. (2). 1979. V. 19. P. 451–456.

Университет МакГилла, Монреаль, Квебек, Канада;
 Университет Чикаго, Чикаго, Иллинойс, США
E-mail: jakobson@math.mcgill.ca

Поступила в редакцию
 01.11.2001