Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Трейбич, Гиперэллиптические касательные накрытия и конечно-зонные потенциалы, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 89–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:05:58

УДК 517.95

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАКРЫТИЯ
И КОНЕЧНО-ЗОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

А. ТРЕЙБИЧ

Настоящая работа посвящена изучению конечно-зонных потенциалов, выражаемых через эллиптические функции. Находятся новые эллиптические конечно-зонные потенциалы и новые эллиптические солитоны уравнения КдВ. Сделан новый шаг вперед в изучении взаимосвязей между эллиптическими солитонами КдВ, эллиптическими конечно-зонными потенциалами и якобианами ассоциированных спектральных кривых.

Библиография: 42 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

0. Введение	90
1. Гиперэллиптические касательные накрытия и эллиптические конечно-зонные потенциалы	96
2. Гиперэллиптические касательные накрытия как дивизоры проективной поверхности $S^\perp$ [38]	104
3. О счетности множества исключительных дивизоров на рациональных поверхностях $S^\sim$ [38]	106
4. Исключительные накрытия; другие случаи	107
5. Канонические θ -характеристики и их потенциалы: случай $\mu^{(2)} = 2n + 1$ [41]	112
6. Вывод новых эллиптических конечно-зонных потенциалов	116
7. Плоская модель для $\mathcal{R}(n, \mu)$ ($\mu^{(2)} = 2n - 3$)	120
8. Подход эллиптической поверхности в изучении плоской модели $\mathcal{C}_{\vec{a}}$	123
9. Полное описание нового класса четных эллиптических конечно-зонных потенциалов	127
Список литературы	134
Предметный указатель	135
Указатель обозначений	136

0. Введение

Интенсивное развитие теории конечно-зонного интегрирования на основе алгебро-геометрических методов, начатое в середине 70-х годов, позволило построить точные решения большого числа дифференциальных уравнений в частных производных. Анализ задачи Коши для уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ) показал, что наиболее интересными квазипериодическими начальными условиями являются конечно-зонные потенциалы. Благодаря работе С. П. Новикова [32], где было доказано, что такие потенциалы, а также соответствующие решения уравнения КдВ определены и эволюционируют на многообразии Якоби римановой поверхности, была осознана их важность для решения всего класса вполне интегрируемых дифференциальных уравнений. На основании этого результата А. Р. Итсом и В. Б. Матвеевым [27] были найдены явные формулы для конечно-зонных решений в терминах абелевых функций; впоследствии формулы такого типа были найдены и для других интегрируемых уравнений. Последующие десятилетия, как и настоящее время, характеризуются неослабевающим интересом к феномену полной интегрируемости, его естественной связи с алгебро-геометрическими конструкциями и его эффективному проникновению в различные области математики и физики. Настоящая работа посвящена изучению конечно-зонных потенциалов, выражаемых через эллиптические функции.

Уместно напомнить, что действительнoзначная функция, $q(x)$, является конечно-зонным потенциалом тогда и только тогда, когда спектр в $L^2(\mathbb{R})$ оператора Хилла, $\partial_x^2 - q(x)$, содержит конечное число зон (и лагун). Общий комплекснозначный мероморфный конечно-зонный потенциал, порождающий стационарные решения иерархии КдВ и построенный по гиперэллиптической римановой поверхности, определяется следующим образом.

Пусть $L = \partial_x^2 - u(x, t)$ – дифференциальный оператор второго порядка, зависящий от параметра t , и g – натуральное число. Тогда существует дифференциальный оператор P порядка $2g + 1$, коэффициентами которого являются дифференциальные полиномы от u , такой, что коммутатор $[P, L]$ – оператор умножения (см., например, [33]). Отсюда следует, что (высшее) уравнение КдВ, $u_t = [P, L]$, описывает изоспектральную деформацию $L(0)$. Кроме того, поскольку q является действительнoзначной гладкой функцией, то q – конечно-зонный потенциал тогда и только тогда, когда эта функция удовлетворяет для некоторого g одному из данных выше уравнений (см. [9], [12], [27], [32]). На этом основании любая такая комплекснозначная мероморфная функция называется конечно-зонным потенциалом. С другой стороны, если дифференциальные операторы P и L коммутируют (т.е. если $[P, L] = 0$), то известная теорема Бурхнала и Чаунди утверждает, что эти операторы алгебраически зависимы, а именно, существует $2g + 1$ таких комплексных чисел $\{r_i, i = 0, \dots, 2g\}$, что $P^2 = \Pi_i (L - r_i)$ (см., например, [33]). Пусть Γ обозначает гиперэллиптическую риманову поверхность, полученную в результате одноточечной компактификации аффинной комплексной кривой $\{(x, y), y^2 = \Pi_i (x - r_i)\}$, и пусть θ обозначает соответствующую тэта-функцию. Любое из описанных выше решений (высших) уравнений КдВ, $u(x, t)$, определяется замечательной формулой Итса–Матвеева (ср. [27])

$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \ln \theta(xU + tV + W), \quad U, V, W \in \mathbb{C}^g. \quad (*)$$

Обратно, для любых спектральных данных $(\Gamma, p, \lambda, D = \sum_{1 \leq i \leq g} p_i)$, где Γ – гиперэллиптическая Риманова поверхность положительного рода g , p – точка Вейер-

штрасса на Γ , λ – локальная координата в окрестности p и D – эффективный дивизор степени g , теория одноточечной функции Бейкера–Ахиезера восстанавливает решение уравнения КдВ, $u(x, t)$, в точности в виде (*) (ср. [11]). В частности, для любого комплексного t_0 функция $u(x, t_0)$ – конечно-зонный потенциал.

Явные примеры двукратно периодических конечно-зонных потенциалов могут быть построены на основе пионерских работ Ч. Эрмита [25] и Е. Л. Айнса [26]. А именно, пусть $\wp$ обозначает эллиптическую функцию Вейерштрасса, ассоциированную с прямоугольной решеткой, ω' – мнимый полупериод и g – натуральное число. В современной спектрально-теоретической интерпретации результаты Айнса приводят к утверждению о том, что самосопряженный оператор $\partial_x^2 - g(g+1)\wp(x+\omega)$ в $L^2(\mathbb{R})$ обладает конечно-зонным спектром; соответствующие спектральные данные были найдены и подробно исследованы (ср. [31]). Последние результаты были затем обобщены на произвольные решетки периодов и общие римановы поверхности (ср. [38]).

Из работ А. Р. Итса и В. Б. Матвеева [27], Б. А. Дубровина [9], Г. Фляшки [16], Г. Маккина и П. ван Мербек [31], Г. Эро, Г. Маккина и Й. Мозера [1] следует, что вещественнозначная (на $\mathbb{R}$) эллиптическая функция $q(x)$ является конечно-зонным потенциалом тогда и только тогда, когда существует *эллиптический КдВ-солитон* (т.е. двукратно периодическое по x решение уравнения КдВ), $u(x, t)$, причем $q(x) = u(x, 0)$. Этот результат остается в силе и для комплексно-аналитической функции $q(x)$ (ср. [38]), которая характеризует эллиптический конечно-зонный потенциал, как начальное условие для эллиптического солитона $u(x, t)$ уравнения КдВ.

Вернемся к примеру g -зонной функции Хилла или Ламе $q(x) = g(g+1)\wp(x)$. Ее эволюция в силу уравнения КдВ (ср. [12] для $g = 2$ и [1] для произвольного g) определяется по формуле

$$u(x, t) \equiv 2 \sum_{1 \leq i \leq n} \wp(x - x_i(t)), \quad n := \frac{g(g+1)}{2},$$

где полюса $x_i(t)$ сливаются при $t = 0$ и описывают интегрируемую систему Калоджеро–Мозера с взаимодействием вида $\wp(x_i - x_j)$. Отсюда, в частности, следует, что формула Итса–Матвеева (*), выражающая $u(x, t)$ через g -мерные тэта-функции, сводится к сумме эллиптических функций.

С другой стороны, хорошо известные многосолитонные решения уравнения КдВ представляют собой нелинейную суперпозицию солитонов. Подобная редукция формулы (*) к сумме эллиптических функций (или комбинации абелевых функций младших родов) представляется интересной, поскольку позволяет:

- 1) описывать специальные решения уравнения КдВ (в частности, эллиптические по одной из переменных);
- 2) изучать и решать естественным образом связанные интегрируемые системы частиц типа эллиптической системы Калоджеро–Мозера.

С геометрической точки зрения объектом исследования являются многообразия Якоби, которые распадаются на сумму абелевых подмногообразий младших родов. Проблема описания многообразий Якоби, связанных с динамикой системы КдВ, была сформулирована С. П. Новиковым в [32]. Для ее решения были привлечены такие методы, как теория редукции Пуанкаре–Вейерштрасса абелевых функций к младшим родам (см. [5]), а также редукция абелевых функций кривых, обладающих нетривиальными автоморфизмами (см. [3], [4]), в результате чего были построены примеры

редукции к эллиптическим функциям решений ряда интегрируемых уравнений в частных производных.

Восходящее к Г. Альфану [24] изучение спектральных свойств дифференциальных операторов произвольного порядка над полем эллиптических функций является другим естественным подходом в этом контексте. Этот подход позволяет исследовать другие редукции уравнения Кадомцева–Петвиашвили, ассоциированные с негиперэллиптическими римановыми поверхностями, в частности, уравнение Буссинеска; в [8], [13], [14], [42] этим методом был получен ряд весьма нетривиальных примеров.

Однако эта статья посвящена, в основном, нахождению новых эллиптических конечно-зонных потенциалов и новых эллиптических солитонов уравнения КдВ. Каждое такое решение ассоциируется с некоторыми спектральными данными (Γ, p, λ, D) , описанными выше (ср. [38; теорема 2.7]), при которых первый КдВ-поток генерируется касательным вектором к Γ в точке p внутри многообразия Якоби. Поэтому для того чтобы получить эллиптическое решение КдВ, мы должны начать с решения следующей геометрической задачи:

найти все такие отмеченные римановы поверхности, (Γ, p) , что внутри их многообразий Якоби Γ является касательной в точке p к эллиптической кривой.

Упомянутая выше теория редукции также может быть применена для решения этой специальной проблемы, как это было показано в [6], [7], где были получены частичные ответы.

В 1980 году И. Кричевер предложил и развил иной весьма эффективный подход, основанный на его прежних результатах, относящихся к теории одноточечной функции Бейкера–Ахиезера (ср. [28]–[30]). Отправным пунктом в этой теории является заданная эллиптическая кривая X , для которой строятся все римановы поверхности, разрешающие сформулированную выше геометрическую задачу и представляющие собой специальные накрытия эллиптической кривой X , удовлетворяющие критерию *касательности*. Каждый такой ковектор, $\pi: \Gamma \rightarrow X$, порождает *эллиптический КР-солитон* (т.е. решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили, являющееся двукратно-периодическим по x). Более того, существует полином степени $n = \deg \pi$, коэффициентами которого являются эллиптические на X функции,

$$P(T, z) = \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i(z) T^i,$$

такой, что

$$\{(T, z) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times X, P(T, z) = 0\},$$

т.е. многообразие его нулей бирационально эквивалентно Γ (ср. [30]); указанные полиномы допускают как простое описание, так и алгоритмическое построение (ср. [36]). Тщательное изучение этого многообразия нулей позволяет понять, как выделить (по крайней мере, в принципе) накрытия, приводящие к эллиптическим солитонам КдВ. Явные примеры таких гиперэллиптических римановых поверхностей вплоть до рода 8 были построены в конце 80-х годов (ср. [34]–[36]).

Отметим, что описанные римановы поверхности естественно вкладываются в специальную линейчатую поверхность над X , что позволяет усовершенствовать подход

Кричевера на основе использования результатов теории алгебраических поверхностей. Это позволило найти дискретное семейство накрытий над X , приводящих к эллиптическим солитонам КдВ и, в частности, – к потенциалам Хилла–Ламе. Для вычисления соответствующих (четных) эллиптических конечно-зонных потенциалов требуется формула для кратности пересечения тэта-дивизора на многообразии Якоби с произвольным первым КдВ-поток. Такая формула, действительно, существует, что позволяет сделать заключительный шаг в доказательстве того, что для любого целочисленного вектора $(a_0, \dots, a_3)$ функция

$$\sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i),$$

где $\{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ – множество полупериодов X , является эллиптическим конечно-зонным потенциалом (ср. [18]–[20], [38], [41]).

В настоящей статье мы продвигаемся на один шаг вперед в изучении взаимосвязей между эллиптическими солитонами КдВ, эллиптическими конечно-зонными потенциалами и якобианами ассоциированных *спектральных кривых*, а именно, мы находим другое семейство накрытий над X , приводящих к эллиптическим солитонам КдВ, и описываем явно канонически ассоциированные эллиптические конечно-зонные потенциалы.

Для краткого описания работы мы сначала приведем основные определения, объясняя их взаимосвязь, и сформулируем основные результаты. Строгие определения будут даны в последующих разделах.

Зафиксируем решетку $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и обозначим через $\wp$ стандартную Λ -периодическую функцию Вейерштрасса и через $\wp'$ – ее производную; обозначим через (X, q) эллиптическую кривую $(\mathbb{C}/\Lambda, 0)$. Обозначим через $\text{KdV}(n, X)$ ($n > 0$) замкнутое подмногообразие n -симметрических степеней X , X_n , определяемых уравнениями:

$$\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \wp'(x_i - x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Хорошо известно, что мероморфная функция $u(x, t)$, Λ -периодическая по x , является эллиптическим солитоном КдВ тогда и только тогда, когда существуют такие натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и отображение $\mathbb{C} \rightarrow \text{KdV}(n, X)$, $t \mapsto \{x_i(t)\}$, что с точностью до функции от t

$$u(x, t) \equiv 2 \sum_{1 \leq i \leq n} \wp(x - x_i(t))$$

(ср. [1]). При этом каждый эллиптический КдВ-солитон единственным образом ассоциируется с проективной кривой рода $g > 0$, (Γ, p) , снабженной дивизором степени g , D_0 , и проекцией $\pi: \Gamma \rightarrow X$ (называемой далее *гиперэллиптическим касательным накрытием*), которая обладает следующими свойствами:

- I) Γ – гиперэллиптическая кривая и p – ее гладкая точка Вейерштрасса (т.е. существует мероморфная функция $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, имеющая в точке p единственный полюс второго порядка);
- II) канонические образы (Γ, p) и (X, q) в якобиане Γ касаются в начале координат.

Обратно, для любого дивизора D степени g решение уравнения КдВ, соответствующее спектральным данным (Γ, p, D) (ср. [10; § 3.1], [33; § 6]), является эллиптическим КдВ-солитон (совпадающим с эллиптическим солитон, определяемым дивизором $D = D_0$).

Известно еще одно важное свойство гиперэллиптических касательных накрытий. Обозначим через $u_D(x, t)$ эллиптический КдВ-солитон, построенный по спектральным данным (π, D) , как это было описано выше. Существует функция (так называемая *функция Бейкера–Ахиезера*), мероморфная на $\mathbb{C} \times (\Gamma \setminus \{p\})$, обозначаемая как $\psi_D(x, \lambda)$ и обладающая следующими свойствами:

i) $\forall \lambda \in \Gamma \setminus \{p\}$ удовлетворяется уравнение

$$\partial_x^2(\psi_D(x, \lambda)) - u_D(x, 0)\psi_D(x, \lambda) = f(\lambda)\psi_D(x, \lambda);$$

ii) $\forall \omega \in \Lambda$, $\psi(x + \omega, \lambda)$ – кратно $\psi(x, \lambda)$.

Таким образом, аффинная кривая $\Gamma \setminus \{p\}$ может быть описана как совместный спектр оператора $\partial_x^2 - u_D(x, 0)$ и оператора сдвига, $T_\omega: \xi(x) \rightarrow \xi(x + \omega)$, $\omega \in \Lambda$. Отсюда также следует, что функция $u_D(x, 0)$ (а также $2 \sum_{1 \leq i \leq n} \wp(x - \alpha_i)$, $\forall \{\alpha_i\} \in \text{KdV}(n, X)$) является эллиптическим конечно-зонным потенциалом.

В том случае, когда дивизор D линейно эквивалентен $g \cdot p$, четная функция $u_D(x, 0)$ будет называться *порождающим потенциалом* степени n над X ($n \in \mathbb{N}$). Эти потенциалы описывают все эллиптические конечно-зонные потенциалы с точностью до их *изоспектральной* эквивалентности (т.е. различные порождающие потенциалы соответствуют неизоморфным *спектральным данным*).

Представляется, однако, затруднительным построить конкретные примеры эллиптических конечно-зонных потенциалов непосредственно по данному выше описанию, не восстановив спектральных данных, или определить, являются ли два таких потенциала изоспектральными. С другой стороны, однако, известно, что для любого $n \in \mathbb{N}^*$ существует конечное число образующих потенциалов степени n над X [39]. Поэтому их классификация является более легкой проблемой.

Мы описываем далее успешно выполненную двухэтапную программу получения больших семейств порождающих потенциалов. Несмотря на то, что исчерпывающее решение проблемы еще не получено, мы приведем наши предположения относительно такой полной классификации.

“2-этапная программа”:

- A) построить все гиперэллиптические касательные накрытия;
- B) построить соответствующие порождающие потенциалы и выделить их из множества четных эллиптических функций.

Выполнение этой двухэтапной программы было начато в [38], где были изучены основные свойства гиперэллиптических касательных накрытий. Как оказалось, для любой решетки Λ и любой степени n существует только конечное число таких накрытий, причем они факторизуются раздутиями некоторых линейчатых поверхностей над $X = \mathbb{C}/\Lambda$, обозначаемых как $S^\perp \rightarrow X$. При этом $S^\perp$ проектируется на рациональную поверхность $S^\sim$, обладающую тем свойством, что все гиперэллиптические касательные накрытия над X возникают из рациональных неприводимых дивизоров на $S^\sim$. Поэтому построенные таким образом гиперэллиптические касательные накрытия, названные в [39] *исключительными*, соответствуют прообразам проекций

$S^\perp \rightarrow S^\sim$ исключительных дивизоров $S^\sim$, что объясняет происхождение указанного названия.

Следующий этап программы состоит в выводе порождающего потенциала, соответствующего исключительному накрытию $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$. Благодаря формуле Итса–Матвеева (*) выполнение второго этапа сводится к нахождению пересечения тэта-дивизора на якобиане Γ с образом (X, q) . Примечательным фактом является то, что общая формула кратности пересечения Фэя–Сигала–Вильсона [16], [34] оказывается эффективно применимой и в том случае, когда π – исключительное накрытие, что является основой при доказательстве следующего результата [41]:

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть Λ – произвольная решетка, $\{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ – множество полупериодов эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Lambda$ ($\omega_0 = 0$). Тогда для любых четырех чисел $(a_i) \in \mathbb{N}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ функция*

$$\sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$$

является четным Λ -периодическим конечно-зонным потенциалом, ассоциированным с исключительным накрытием степени

$$n := \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1)$$

над $\mathbb{C}/\Lambda$ и рода

$$g := \frac{1}{2} \max \left\{ 2M, 1 + \sum - (1 + (-1)^\Sigma) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

где

$$M := \max\{a_i\}, \quad \sum := \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i \quad \text{и} \quad m := \min\{a_i\}.$$

При этом $\sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$ является порождающим потенциалом тогда и только тогда, когда $a_0 = M$ и $2M \geq \sum - (1 + (-1)^\Sigma)m$.

Отметим, что критерий выделения эллиптических конечно-зонных потенциалов из общих в виде условий обращения в нуль некоторых тэта-констант был получен Е. Д. Белоколом и В. З. Энольским в [6]; иной, но близкий подход был развит Л. Гавриловым и А. М. Переломовым [17]. Недавно Ф. Гестези и Р. Вайкард нашли эффективное аналитическое описание всех эллиптических конечно-зонных потенциалов, которое они применили для доказательства приведенного выше результата. А именно, ими доказано, что эллиптическая функция $q(x)$ является конечно-зонной тогда и только тогда, когда для любого $E \in \mathbb{C}$ ассоциированное уравнение Хилла, $\psi''(x) - q(x)\psi(x) = E\psi(x)$, обладает мероморфной системой решений (см. [19]–[21]). Таким образом, задача определения того, является ли данная эллиптическая функция конечно-зонным потенциалом, была решена хорошо известным методом Фробениуса. В частности, упомянутый результат выводится немедленно. Помимо этого они предъявили конкретную процедуру построения соответствующей отмеченной римановой поверхности (Γ, p) , реализованной как накрытие степени 2 над сферой

Римана, для некоторых классов эллиптических конечно-зонных потенциалов (см. [18], [21], [22]). Следует также упомянуть, что А. О. Смирнов построил примеры эллиптических конечно-зонных потенциалов, которые не покрываются теоремой 0.1 (см., например, [34]).

Будучи отчасти мотивированы последним упомянутым результатом, мы развиваем в этой статье описанный выше двухэтапный алгебро-геометрический подход, $(A + B)$, резюмируем известные результаты [41] и рассматриваем первый пример эллиптического конечно-зонного потенциала, не связанного с *исключительными накрытиями*. Римановы поверхности, возникающие в этапе А), соответствуют в этом случае неприводимым особым дивизорам рациональной поверхности $S^\sim$, имеющей арифметический род 1 (не 0, как ранее). Они могут быть выделены как рациональные слои соответствующего пучка эллиптических кривых в $S^\sim$ с помощью формулы, принадлежащей С. Лефшецу. Упомянутая ранее формула Фэя–Сигала–Вильсона, по-прежнему, применима и приводит к новому семейству эллиптических конечно-зонных потенциалов и порождающих потенциалов.

Наконец, варьируя решетку Λ и применяя такую же технику, как и на этапе А), мы получаем полное описание последнего семейства. А именно, мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.2. *Для любой решетки Λ и любых четырех чисел $(a_i) \in \mathbb{N}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ четная Λ -периодическая функция $2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$ ($2\rho \neq 0$) является конечно-зонным потенциалом тогда и только тогда, когда ρ удовлетворяет следующему уравнению: $\sum_{0 \leq i \leq 3} (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0$. При этом для каждого конечно-зонного потенциала род соответствующей римановой поверхности может быть определен по числам (a_i) и ρ .*

Наконец, мы описываем, как и в [41], подсемейство порождающих потенциалов.

Мы напоминаем для удобства читателя в разделах 1–3 и 5 основные определения и излагаем ранние результаты совместных работ с Жаном-Луи Вердье.

Автор хотел бы подчеркнуть, что за исключением разделов 8 и 9 все остальные разделы обсуждались и разрабатывались совместно с Ж.-Л. Вердье (более 9 лет тому назад!). Следует также отметить, что исходные положения для полного описания эллиптических солитонов, полученные в разделе 9 (в частности, *основное уравнение* (7) и подход плоской модели, обсуждаемый в разделе 7), также принадлежат ему. Наконец, подчеркнем, что разделы 4 и 7 частично основаны на рукописных заметках Ж.-Л. Вердье. При других обстоятельствах эта совместная работа могла бы быть завершена много лет тому назад.

1. Гиперэллиптические касательные накрытия и эллиптические конечно-зонные потенциалы

1.1. Пусть Γ – неприводимая проективная кривая арифметического рода $g > 0$ и λ – локальная координата Γ в гладкой точке $p \in \Gamma$. Зададим произвольный неспециальный дивизор D степени g и найдем такое наибольшее натуральное число m , что $D - mp$ все еще остается эффективным дивизором. Существует единственная функция (так называемая *функция Бейкера–Ахиезера*), обозначаемая ψ_D , которая мероморфна на $\mathbb{C}^3 \times (\Gamma \setminus \{p\})$ и удовлетворяет следующим условиям (см. [28], [29] и также [10], [11]): для любой точки общего положения $(x, y, t) \in \mathbb{C}^3$ ограничение ψ_D на

$\{(x, y, t)\} \times (\Gamma \setminus \{p\})$ имеет:

- а) дивизор полюсов, равный $D - mp$;
- б) существенную особенность в p , в окрестности которой справедливо разложение

$$\psi_D(x, y, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda^m} \exp(x\lambda^{-1} + y\lambda^{-2} + t\lambda^{-3}) \left(1 + \sum_{j \geq 1} \xi_{j,D}(x, y, t) \lambda^j \right). \quad (1)$$

1.2. Назовем далее (Γ, p) *гиперэллиптической отмеченной кривой*, если существует такая проекция $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, что $f^*(\infty) = 2p$. В этом случае Γ канонически снабжена гиперэллиптической инволюцией, $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$ ($\Gamma/\sim_\sigma \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), для которой точка p является неподвижной. Таким образом, p – точка Вейерштрасса и для любой σ -антиинвариантной локальной координаты Γ в p , например λ , выполняется

$$\sigma^*(\lambda) = -\lambda \quad \text{и} \quad f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + O(\lambda^2).$$

При этом для любого дивизора D , введенного выше, соответствующая функция Бейкера–Ахиезера удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u_D \right) \psi_D(x, y, t; \lambda) = f(\lambda) \psi_D(x, y, t; \lambda), \quad (2)$$

где

$$u_D(x, y, t) := -\frac{\partial}{\partial x} (\xi_{1,D}(x, y, t)),$$

а функция ψ_D является так называемой волновой функцией, ассоциированной с обратимым пучком $\mathcal{O}_\Gamma(D - p)$ (см. [33; § 6]). Во всех случаях ψ_D является собственной функцией оператора Шрёдингера, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u_D$, с собственным значением $f(\lambda)$. При этом функция u_D не зависит от y и удовлетворяет уравнению Кортевега–де Вриза. Зафиксировав σ -антиинвариантную локальную координату λ кривой Γ в точке p , можно единственным образом определить начальное значение функции $u(x) = u_D(x, 0, 0)$ по классу изоморфизмов пучка $\mathcal{O}_\Gamma(D - p)$. Мы будем называть далее $u(x)$ конечно-зонным потенциалом KdV, ассоциированным с $(\Gamma, p, \lambda, \mathcal{O}_\Gamma(D - p))$.

1.3. Пусть Λ – решетка в $\mathbb{C}$ и $(X, q) = (\mathbb{C}/\Lambda, 0)$ – соответствующая эллиптическая кривая с канонической локальной координатой z в начале координат $q \in X$. Рассмотрим произвольную конечную отмеченную проекцию $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$, где p – гладкая точка Γ и $\pi(p) = q$. Введем естественно ассоциированное с π (рациональное) вложение Абеля, $A_p: \Gamma \dashrightarrow \text{Jас } \Gamma$, $p' \mapsto \mathcal{O}_\Gamma(p' - p)$, и гомеоморфизм, $i_\pi: X \rightarrow \text{Jас } \Gamma$, $q' \mapsto A_p(\pi^*(q' - q))$, Γ и X на (обобщенный) якобиан Γ .

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [36].

- 1) Отмеченная проекция $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ является *касательным накрытием* тогда и только тогда, когда $i_\pi(X)$ и $A_p(\Gamma)$ касаются в начале координат, $A_p(p) = i_\pi(q)$, многообразия $\text{Jас } \Gamma$.
- 2) $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – *гиперэллиптическое касательное накрытие* тогда и только тогда, когда π – касательное накрытие, а (Γ, p) – отмеченная гиперэллиптическая кривая.

1.5. ТЕОРЕМА (критерий касательности накрытия; [30; с. 288] или [36]). *Отмеченный морфизм $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ является касательным накрытием тогда и только тогда, когда существует мероморфная над Γ функция k , называемая функцией касания, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) k голоморфна вне $\pi^{-1}(q)$;
- 2) $k + \pi^*(z^{-1})$ хорошо определена в окрестности $\pi^{-1}(q) \setminus \{p\}$ и имеет простой полюс в p .

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2]. Пространство модулей всех свободных от кручений когерентных пучков ранга 1 и степени $g-1$ над кривой Γ , обозначаемое $W(\Gamma)$, существует и будет далее называться *компактифицированным якобианом* кривой Γ . Пусть ω_Γ обозначает канонический пучок над Γ , и пусть для любого $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ $\mathcal{L}^*$ обозначает пучок $\mathcal{L}^* := \text{Hom}(\omega_\Gamma, \mathcal{L})$. Тогда $\mathcal{L}^*$ принадлежит $W(\Gamma)$ и $(\mathcal{L}^*)^*$ изоморфен $\mathcal{L}$. Обратно, отображение $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^*$ порождает инволюцию $W(\Gamma)$. Мы будем говорить, что $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ – *θ -характеристика*, если $\mathcal{L}$ – неподвижная точка определенной выше инволюции, т.е. если $\mathcal{L} \simeq \text{Hom}(\omega_\Gamma, \mathcal{L})$.

1.7. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Компактифицированный якобиан $W(\Gamma)$ является проективным многообразием, на котором обобщенный якобиан, $\text{Jac } \Gamma$, действует как тензорное произведение. Если Γ – гладкая кривая, то $W(\Gamma)$ совпадает с $\text{Jac}^{g-1}(\Gamma)$. Если, как в нашем случае, Γ может быть вложена в гладкую алгебраическую поверхность, то $W(\Gamma)$ неприводим и имеет размерность g . Обозначим через Γ° – открытое гладкое подмножество в Γ и через Γ_g° его g -ю симметрическую степень; тогда многообразие $\text{Jac}^{g-1}(\Gamma)$ совпадает с $\{\theta_\Gamma(D-p), D \in \Gamma_g^\circ\}$ и является плотным открытым подмножеством в $W(\Gamma)$ (см., например, [2]).

2) Мы можем сопоставить некоторый конечно-зонный потенциал каждому $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$. Действительно, существуют единственная частичная десингуляризация $j: \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ арифметического рода $\bar{g} \leq g$ и обратимый пучок $\bar{\mathcal{L}} \in \text{Jac}^{\bar{g}-1}(\bar{\Gamma}) \subset W(\bar{\Gamma})$ такие, что $j_*(\bar{\mathcal{L}})$ изоморфно $\mathcal{L}$. Мы будем считать, что соответствующий потенциал $u_{\mathcal{L}}(x) := u_{\bar{\mathcal{L}}}(x)$ ассоциирован с $\mathcal{L}$ [39; §6]).

3) Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ некоторая отмеченная проекция степени $n \geq 1$ и

$$\Theta_\Gamma := \{\mathcal{L} \in W(\Gamma), h^\circ(\mathcal{L}) > 0\}$$

– *тэта-дивизор* $W(\Gamma)$. Для произвольного $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ обозначим

$$\text{Orb}_{\mathcal{L}}: X \rightarrow W(\Gamma)$$

соответствующий *орбитный морфизм*,

$$q' \mapsto \mathcal{L} \otimes i_\pi(q') = \mathcal{L} \otimes \theta_\Gamma(\pi^*(q' - q)).$$

Производя обратное отображение Θ_Γ с помощью $\text{Orb}_{\mathcal{L}}$, мы получим дивизор степени n на X ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \text{Orb}_{\mathcal{L}}^*(\Theta_\Gamma)$$

(ср. [39; §A2]). Следовательно, мы можем ассоциировать с каждой ранее определенной проекцией π морфизм

$$I_\pi: W(\Gamma) \rightarrow X_n, \quad \mathcal{L} \mapsto \text{Orb}_{\mathcal{L}}^*(\Theta_\Gamma),$$

где X_n обозначает n -ю симметрическую степень X .

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1) Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие, и пусть $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$ обозначает гиперэллиптическую инволюцию. Обозначим через $[-1]: (X, q) \rightarrow (X, q)$ обратный гомеоморфизм. Тогда π эквивариантно (т.е. $\pi \circ \sigma = [-1] \circ \pi$) и существует единственная σ -антиинвариантная касательная функция k . В частности, можно выбрать $\lambda_\pi := (k + \pi^*(z^{-1}))^{-1}$ как σ -антиинвариантную локальную координату Γ в p .

2) Напомним, что $\wp$ -функция Вейерштрасса, ассоциированная с решеткой Λ , является единственной четной мероморфной функцией на X , голоморфной вне q и имеющей в q лорановское разложение вида $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2)$. Нас будет, в основном, интересоваться в $\text{KdV}(n, X)$ ($n \geq 1$) замыкание в X_n локально замкнутого подмногообразия, определенного следующей системой уравнений:

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \wp'(x_i - x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_i \neq x_j \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k \in X_n \right), \quad (3)$$

где $\wp'$ – производная $\wp$. $\text{KdV}(n, X)$ параметризует все КдВ-решения вида $u(x, t) = 2 \sum_{i=1}^n \wp(x - x_i(t))$ и будет далее называться n -м КдВ-локусом (над X) (см., например, [1]).

1.9. ТЕОРЕМА ([1], [39; § 7]). Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие степени n . Тогда для любого $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ конечно-зонный потенциал, ассоциированный с $(\Gamma, p, \lambda_\pi, \mathcal{L})$, равен $u_{\mathcal{L}}(x) = 2 \sum_{i=1}^n \wp(x - \alpha_i)$, где $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ равна $I_\pi(\mathcal{L})$ и принадлежит $\text{KdV}(n, X)$. При этом морфизм $I_\pi: W(\Gamma) \rightarrow X_n$, помимо факторизации $\text{KdV}(n, X) \rightarrow X_n$, является также инъективным и эквивариантным (т.е. для любого $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ $I_\pi(\mathcal{L}^*) = [-1](I_\pi(\mathcal{L}))$). В частности, потенциал $u_{\mathcal{L}}(x)$ является Λ -периодическим для любого $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ и четным, если и только если $\mathcal{L}$ – θ -характеристика.

1.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ такое, как в п. 1.9. Выберем некоторую десингуляризацию $j: (\bar{\Gamma}, p) \rightarrow (\Gamma, p)$ и обозначим через j_* замкнутую иммерсию $j_*: W(\bar{\Gamma}) \rightarrow W(\Gamma)$, $\bar{\mathcal{L}} \mapsto j_*(\bar{\mathcal{L}})$. Тогда композиция отмеченного морфизма, $\bar{\pi} := \pi \circ j: (\bar{\Gamma}, p) \rightarrow (X, q)$, также является гиперэллиптическим касательным накрытием, и соответствующее инъективное отображение $I_{\bar{\pi}}: W(\bar{\Gamma}) \rightarrow \text{KdV}_n(X)$ факторизуется как $I_{\bar{\pi}} = I_\pi \circ j_*$ ([33; § 6]). Следовательно, $I_{\bar{\pi}}(W(\bar{\Gamma}))$ – замкнутое подмногообразие $I_\pi(W(\Gamma))$ ($\subset \text{KdV}(n, X)$) и семейство Λ -периодических конечно-зонных потенциалов, ассоциированных с π , воспроизводит потенциалы, ассоциированные с $\bar{\pi}$.

1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ такое, как в п. 1.9. Назовем π минимально-гиперэллиптическим касательным накрытием, если π не факторизуется (неизоморфным) гиперэллиптическим касательным накрытием над X такой же степени, как и π .

1.12. ТЕОРЕМА ([39; § 8.10], см. также [1]). Пусть $R(n, X)$ обозначает (конечное; см. п. 2.10) множество классов изоморфизмов минимально-гиперэллиптических касательных накрытий степени n над X , и пусть $W(n, X)$ обозначает

(несвязное) объединение их компактифицированных якобианов. Тогда естественный морфизм $I_n(X): W(n, X) \rightarrow \text{KdV}(n, X)$ всех I_π , $\pi \in R(n, X)$, является бирациональным инъективным отображением. В частности, $\text{KdV}(n, X)$ расщепляется на несвязное объединение образов соответствующих компактифицированных якобианов:

$$\text{KdV}(n, X) = \coprod_{\pi \in R(n, X)} I_\pi(W(\Gamma)).$$

1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [38]. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – некоторое гиперэллиптическое касательное накрытие, $\mathcal{L} \in W(\Gamma)$ и $u(x) := u_{\mathcal{L}}(x)$ обозначает соответствующий эллиптический конечно-зонный потенциал (п. 1.9).

1) Назовем функцию $u(x)$ *эллиптическим конечно-зонным потенциалом*, ассоциированным с $(\pi; \mathcal{L})$ (или с $(\Gamma, p, \lambda_\pi, \mathcal{L})$).

2) Назовем функцию $u(x)$, определенную как мероморфная функция над $X = \mathbb{C}/\Lambda$, $u: X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *непримитивной*, если существует нетривиальная изогения $\varphi: (X, q) \rightarrow (X', q')$, факторизующая u .

1.14. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пусть $u(x): X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ – непримитивная функция как в п. 1.13.2) и $\widehat{\varphi}: (X', q') \rightarrow (X, q)$ обозначает дуальную изогению. Тогда $d := \deg \varphi = \deg \widehat{\varphi}$ делит n , $\widehat{\varphi}$ факторизует π и обратный морфизм, $\varphi^*: X'_{n/d} \rightarrow X_n$, $\sum_j \beta_j \mapsto \sum_j \varphi^*(\beta_j)$, факторизует $I_\pi: W(\Gamma) \rightarrow X_n$. Более точно, существует гиперэллиптическое касательное накрытие $\pi': (\Gamma, p) \rightarrow (X', q')$ такое, что $n = d \cdot \deg \pi'$, $\pi = \widehat{\varphi} \circ \pi'$ и $I_\pi = \varphi^* \circ I_{\pi'}$.

2) Обратно, если $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ факторизуется изогенией степени $d > 1$, $\psi: (X', q') \rightarrow (X, q)$, как $\pi = \psi \circ \pi'$, то $n = d \cdot \deg \pi'$, $\pi': (\Gamma, p) \rightarrow (X', q')$ является гиперэллиптическим касательным накрытием степени n/d и I_π факторизуется как $I_\pi = \varphi^* \circ I_{\pi'}$, где φ равно $\widehat{\psi}$, дуальной изогении ψ . Поэтому любой эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с π , является непримитивным и факторизуется $\varphi = \widehat{\psi}: X \rightarrow X'$. Будем также называть отображение π *непримитивным*.

1.15. Основываясь на данных выше определениях и введенных понятиях, мы опишем структуру статьи и развиваемые далее методы для решения поставленной задачи.

1) Критерий касательности 1.5 является промежуточным шагом на пути к использованию подхода алгебраических поверхностей в разделах 2 и 3. Основную роль здесь играет раздутие некоторых линейчатых поверхностей $\pi_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow S \rightarrow X$ и их факторов при действии естественной инволюции $\tau^\perp$, $S^\sim := S^\perp / \sim_{\tau^\perp}$. Мы начинаем с доказательства того, что любое гиперэллиптическое касательное накрытие $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ единственным образом факторизуется в результате действия $\pi_{S^\perp}$. Будем говорить, что π имеет “тип” $\mu = (\mu_i)$, если образ Γ в $S^\perp$ пересекает исключительный дивизор $r_i^\perp$ с кратностью μ_i при $i = 0, \dots, 3$ (пп. 2.1, 2.2). Последнее означает, что (описательно говоря) Γ имеет $\mu_i + \delta_{i0}$ точек Вейерштрасса над полупериодами ω_i ($i = 0, \dots, 3$). Для любых $\mu \in \mathbb{N}^4$ и $n \geq 1$ обозначим через $R(n, \mu, X)$ подмножество $R(n, X)$, образованное всеми накрытиями $\pi \in R(n, X)$, имеющими “тип” μ . Элементы $R(n, \mu, X)$ могут быть сопоставлены неприводимым дивизорам специальной линейной системы на $S^\perp$. Знание соответствующих классов эквивалентности позволяет в

итоге получить основные результаты относительно $R(n, \mu, X)$. Например, если выполняются условия $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv n \pmod{2}$, но не выполняется условие $(2n + 1 - \sum_{i=0}^3 \mu_i^2) \in 4\mathbb{N}$, то множество $R(n, \mu, X)$ пусто (п. 2.3). В противном случае $R(n, \mu, X)$, а также $R(n, X)$ конечны и любое $\pi \in R(n, \mu, X)$ имеет (арифметический) род $\frac{1}{2}(-1 + \sum_{i=0}^3 \mu_i)$ (шп. 2.10, 2.6).

2) Поскольку естественная инволюция $\tau^\perp: S^\perp \rightarrow S^\perp$ индуцирует гиперэллиптическую инволюцию на любой из кривых Γ , то проекция Γ в $S^\sim := S^\perp / \sim_{\tau^\perp}$ является рациональной неприводимой кривой из специальной линейной системы, например $|\lambda(n, \mu)|$, в $S^\sim$ (п. 3.1). Соответственно, любая неприводимая рациональная кривая в $|\lambda(n, \mu)|$ порождает элемент $R(n, \mu, X)$ (п. 2.6). Этот последний результат используется, в частности, при доказательстве существования некоторого бесконечного семейства минимально-гиперэллиптических касательных накрытий. А именно, мы начинаем с сопоставления исключительного дивизора $S^\sim$ каждому $\mu = (\mu_i) \in \mathbb{N}^4$, удовлетворяющему равенству $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \pmod{2}$. Ограничение $\pi_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow X$ на прообраз (при отображении $S^\perp \rightarrow S^\sim$) этого исключительного дивизора, как показывается далее, является минимально-гиперэллиптическим касательным накрытием типа μ и степени $n := \frac{1}{2}(-1 + \sum_{i=0}^3 \mu_i^2)$. Таким образом, мы получаем единственный элемент пространства модулей $R(n, \mu, X)$, называемый далее *исключительным накрытием типа μ (и степени $n := \frac{1}{2}(-1 + \sum_{i=0}^3 \mu_i^2)$) над X* (см. шп. 3.4, 4.1–4.4).

3) Оставшаяся часть раздела 4 посвящается изучению (впервые!) новых случаев. Мы начинаем с доказательства того, что для всех $n \geq 1$ и $\mu \in \mathbb{N}^4$ таких, что

$$\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \pmod{2} \quad \text{и} \quad \left(2n + 1 - \sum_{i=0}^3 \mu_i^2\right) \in 4\mathbb{N},$$

размерность линейной системы $|\lambda(n, \mu)|$ равна $\frac{1}{4}(2n + 1 - \sum_{i=0}^3 \mu_i^2)$ (п. 4.9). Отсюда следует, что если $\sum_{i=0}^3 \mu_i^2 = 2n - 3$ (это первый “неисключительный случай”!), то множество $R(n, \mu, X)$ находится во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми рациональными слоями пучка эллиптических кривых на $S^\sim$. Применяя формулу Лефшеца (см., например, [23; с. 509]), связывающую характеристику Эйлера–Пуанкаре слоев пучка с $S^\sim$, нам удастся вычислить размерность $R(n, \mu, X)$ (п. 4.12). Последнее подразумевает существование нового семейства гиперэллиптических касательных накрытий (отличного от семейства исключительных накрытий).

4) В разделе 5 и далее мы сопоставляем каждому гиперэллиптическому касательному накрытию степени n и арифметического рода g , например $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$, следующие восемь “канонических” θ -характеристик (п. 5.3.3):

$$\begin{cases} \xi = \theta_\Gamma((g-1)p + \pi^*(\omega_i - q)), \\ \xi = \theta_\Gamma((g-1-n)p + \pi^*(\omega_i)) \end{cases} \quad (i = 0, \dots, 3), \quad (4)$$

где, как обычно, $\{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ ($\omega_0 = q$) обозначает множество $\frac{1}{2}\Lambda/\Lambda$, полупериодов (X, q) . Нахождение соответствующих четных эллиптических конечно-зонных потенциалов (см. п. 1.9) сводится к вычислению пересечений их X -орбит ($\text{Orb}_\xi X$) с тэта-дивизором Θ_Γ . Поскольку мы рассматриваем (гиперэллиптические) касательные накрытия, $\text{Orb}_\xi(X)$ является также первым KP -потокм на $W(\Gamma)$, ассоциированным с данными (Γ, p, ξ) . Аналогично, мы можем вычислить кратность его пересечения с Θ_Γ

в произвольной точке с помощью формулы Фей–Сигала–Вильсона раздела 5 ([15], [33], см. также [41; §3]). Эта задача была полностью решена для исключительных накрытий, как это объясняется в оставшейся части раздела 5. Напомним, что для любого исключительного накрытия типа μ четный эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с введенной выше “канонической” θ -характеристикой, равен

$$u_\xi(x) = \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i) \quad (5)$$

для некоторых $(a_i) \in \mathbb{N}^4$, выражаемых, в свою очередь, через (μ_i) (см., например, п. 5.5) и таких, что $2n = \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)$. Обратно, для данного целочисленного вектора $(a_i) \in \mathbb{N}^4$ существует единственный вектор μ такой, что

$$u(x) = \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$$

является эллиптическим конечно-зонным потенциалом, ассоциированным с одной из “канонических” θ -характеристик над исключительным накрытием (типа μ), степени

$$n := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)$$

и арифметического рода

$$\frac{1}{2} \max \left\{ 2M, 1 + \Sigma - (1 + (-1)^\Sigma) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

где

$$M := \max\{a_i\}, \quad \Sigma := \sum_{i=0}^3 a_i \quad \text{и} \quad m := \min\{a_i\}$$

(см. также [36]).

5) Поскольку нашей целью является перенесение этих результатов на случаи, отличные от исключительных накрытий, мы производим (начиная с раздела 6) аналогичные рассмотрения следующего интересного случая: $\bigcup_{2n-3=\sum \mu_i^2} R(n, \mu, X)$. Мы разрешаем проблему характеристики “канонически” ассоциированных эллиптических конечно-зонных потенциалов путем глобализации нашей предыдущей конструкции. Пусть $\mathcal{X}$ обозначает пространство модулей эллиптических кривых, характеризующихся их полупериодами, и пусть $\mathcal{R}(n, \mu)$ обозначает алгебраическое семейство $\bigcup_{\mathcal{X}} R(n, \mu, X)$. Предположим (в разделе 6 и далее), что $\mu^{(2)} = 2n - 3$, и сопоставим каждому $\pi \in \mathcal{R}(n, \mu)$ одну из канонических θ -характеристик, $\pi \mapsto \xi$ (например, $\xi = \theta_\Gamma((g-1)p)$). Соответствующий эллиптический конечно-зонный потенциал, $u_\xi(x)$, равен в этом случае

$$u_\xi(x) \equiv 2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i) \quad (6)$$

при некотором $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$ таком, что $n = 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)$ (раздел 6), и ρ из X , $2\rho \neq 0$, удовлетворяющем уравнению

$$\sum_{i=0}^3 (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0. \quad (7)$$

6) Уравнение (7), действительно, является необходимым и достаточным условием того, что такая функция является эллиптическим конечно-зонным потенциалом (п. 6.2). Мы также приходим к выводу, что $\rho \mapsto (\wp(\rho) : \wp(\omega_1) : \wp(\omega_2)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ определяет изоморфизм между множеством решений

$$\left\{ \sum_{i=0}^3 (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0, \rho \in X, X \in \mathfrak{X} \right\}$$

и аффинной секстикой $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ (ш. 7.3, 7.4). Наконец, мы доказываем, что композиция последних отображений

$$\pi \mapsto \xi \mapsto u_{\xi}(x) \mapsto (\wp(\rho) : \wp(\omega_1) : \wp(\omega_2))$$

приводит к собственному инъективному отображению (а именно вложению) $\mathcal{R}(n, \mu)$ в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ (п. 7.7, см. также п. 9.6).

7) Обратно, для любого $X \in \mathfrak{X}$ и любого решения уравнения (7) (эквивалентно, для любой точки $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$) естественно поставить вопрос, является ли функция (6) эллиптическим конечно-зонным потенциалом, и найти соответствующие спектральные данные $(\pi; \xi)$ при утвердительном ответе на этот вопрос. Например, если $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ неприводимо, то $\mathcal{R}(n, \mu)$ накрывает всю аффинную секстику $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$, и любая такая функция $u(x)$ – эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с хорошо определенной канонической θ -характеристикой над некоторым $\pi \in R(n, \mu, X)$. Вообще говоря, последнее утверждение остается верным для любой функции $u(x)$, описанной выше, если и только если $(\wp(\rho) : \wp(\omega_1) : \wp(\omega_2))$ принадлежит к образу $\mathcal{R}(n, \mu)$. Следовательно, мы естественно находим целочисленные векторы $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$, для которых $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ приводимо, что позволяет предъявить соответствующее разложение. Примечательно, что последняя задача снова сводится в разделе 8 к изучению приводимых слоев пучка эллиптических кривых (т.е. образованных секстиками $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ и $\mathcal{C}_0$) и применению той же формулы Лефшеца, как и в разделе 4.

8) Собственно говоря, дополнение образа $\mathcal{R}(n, \mu)$ в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ также параметризует эллиптические конечно-зонные потенциалы, хотя и другого типа. Последние потенциалы соответствуют (“исключительным”) гиперэллиптическим касательным накрытиям степени n , но типа μ' , отличного от μ (ш. 9.4, 9.6.4) и 9.9). Наш подход “эллиптических поверхностей” позволяет в итоге дать (см. конец раздела 9) достаточно исчерпывающий ответ на наш предыдущий вопрос: для любого $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$, любой эллиптической кривой $X \in \mathfrak{X}$ и произвольного $\rho \in X \setminus \{\omega_i\}$ функция (6) есть эллиптический конечно-зонный потенциал тогда и только тогда, когда выполняется условие (7). Подробнее, пусть g обозначает натуральное число

$$g := \frac{1}{2} \max \left\{ 2M, 1 + \Sigma - (1 + (-1)^{\Sigma}) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

где

$$M := \max\{a_i\}, \quad \Sigma := \sum_{i=0}^3 a_i \quad \text{и} \quad m := \min\{a_i\},$$

и пусть $\Pi_{\vec{a}}(x, y, z)$ – однородные многочлены, определяемые в п. 9.9. Тогда если выполняется (7), но $\Pi_{\vec{a}}(\wp(\rho), \wp(\omega_1), \wp(\omega_2)) \neq 0$, эллиптический конечно-зонный потенциал $u(x)$ ассоциирован с канонической θ -характеристикой над гиперэллиптическим касательным накрытием степени

$$n := 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1),$$

рода g и типа $\mu = (\mu_i)$ такого, что $\sum_{i=0}^3 \mu_i^2 = 2n - 3$. В другом случае, т.е. если выполняется (7) и $\Pi_{\vec{a}}(\wp(\rho), \wp(\omega_1), \wp(\omega_2)) = 0$, потенциал $u(x)$ ассоциирован с “не канонической” θ -характеристикой над исключительным накрытием такой же степени n , рода $g + 1$ и типа $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_i)$ такого, что $\sum_{i=0}^3 \hat{\mu}_i^2 = 2n + 1$ (более подробное описание см. в п. 9.9).

9) Заключим этот длинный вводный раздел формулированием некоторой открытой проблемы. Для любой эллиптической кривой $X \in \mathfrak{X}$, произвольного $\mu = (\mu_i)$ (как в п. 1.15.4)) и любого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $\sum_{i=0}^3 \mu_i^2 = 2n + 1$, множество $\mathcal{R}(n, \mu, X)$ содержит единственный элемент – “исключительное накрытие типа μ ” над X . В [18; §3.5.iii)] было доказано, что для “достаточно общей” X исключительное накрытие типа μ над X является гладким. В случае $\sum_{i=0}^3 \mu_i^2 = 2n - 3$ (см. п. 2.3) множество $\mathcal{R}(n, \mu, X)$ является конечным и для общей эллиптической кривой X_{gen} его размерность равна $\#\mathcal{R}(n, \mu, X_{\text{gen}}) = 6 - 2j$, $j := \#\{i, \mu_i = 0\}$ (п. 4.12). Мы предполагаем, что соответствующее накрытие также является гладким.

2. Гиперэллиптические касательные накрытия как дивизоры проективной поверхности $S^\perp$ [38]

2.1. Пусть $\mathcal{E}$ – единственный (с точностью до изоморфизма) неразложимый локально свободный пучок ранга 2 и степени 0 над эллиптической кривой (X, q) . Пусть $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ обозначает ассоциированное расслоение проективного пространства, канонически снабженное проекцией $\pi_S: S \rightarrow X$. Хорошо известно, что S – единственное линейчатое пространство над X , имеющее только одно сечение (обозначаемое далее C_0) самопересечений 0. Обратный гомеоморфизм $[-1]: (X, q) \rightarrow (X, q)$ может быть поднят как инволюция $S, \tau: S \rightarrow S$, с двумя неподвижными точками над каждым из полупериодов, ω_i ($i = 0, \dots, 3$), кривой (X, q) : одна в C_0 , обозначаемая s_i , и другая, обозначаемая r_i . Пусть $e: S^\perp \rightarrow S$ обозначает раздутие S в восьми неподвижных точках τ . Мы по-прежнему можем поднять $\tau: S \rightarrow S$ как инволюцию, $\tau^\perp: S^\perp \rightarrow S^\perp$. Соответствующие исключительные дивизоры, обозначаемые как $\{r_i^\perp, s_i^\perp, i = 0, \dots, 3\}$, остаются неподвижными при действии $\tau^\perp$, и фактор $S^\sim := S^\perp / \sim_{\tau^\perp}$ является гладкой рациональной поверхностью. Степень 2 проекции $\phi: S^\perp \rightarrow S^\sim$ непосредственно связана с множеством всех гиперэллиптических касательных накрытий. На самом деле, как это будет показано далее, каждое такое накрытие единственным образом факторизуется посредством $\pi_{S^\perp} := \pi_S \circ e: S^\perp \rightarrow S$ и может быть восстановлено по численно описанной рациональной неприводимой кривой в $S^\sim$ (п. 2.6).

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие. Обозначим $i^\perp: \Gamma \rightarrow S^\perp$ единственный морфизм такой, что $\pi = \pi_S \circ e \circ i^\perp$. Назовем *типом* π кратность пересечения вектора $\mu = (\mu_i) := (i^\perp(\Gamma) \cdot r_i^\perp) \in \mathbb{N}^4$ и обозначим через $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ соответственно суммы $\mu^{(1)} := \sum_{i=0}^3 \mu_i$ и $\mu^{(2)} := \sum_{i=0}^3 \mu_i^2$.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие степени n и типа μ и $i^\perp: \Gamma \rightarrow S^\perp$ – каноническое разложение π по $e: S^\perp \rightarrow S$. Тогда

- 1) образ $\Gamma^\perp := i^\perp(\Gamma)$ является $\tau^\perp$ -инвариантным и линейно эквивалентным $e^*(nC_0 + S_0) - s_0^\perp - \sum_{i=0}^3 \mu_i r_i^\perp$, где $S_0 = \pi_S^*(q)$;
- 2) ограничение $\tau^\perp$ на $\Gamma^\perp$ индуцирует гиперэллиптическую инволюцию на Γ и $\phi(\Gamma^\perp)$ – рациональная неприводимая кривая в $S^\sim$. При этом имеют место следующие (не)равенства между n , $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ и арифметическим родом g кривой Γ :
- 3) $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv n \pmod{2}$;
- 4) $\mu^{(2)} \leq 2n + 1$ и $(2n + 1 - \mu^{(2)}) \in 4\mathbb{N}$;
- 5) $2g + 1 \leq \mu^{(1)}$ и $\frac{1}{2}g(g + 1) \leq n$.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы будем называть целочисленный вектор $\mu \in \mathbb{N}^4$ *n-подходящим* (при $n \in \mathbb{N}$),¹ если $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv n \pmod{2}$.

2.5. ЛЕММА. Для любой пары $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$ такой, что μ – *n-подходящий* вектор, существует единственный класс эквивалентности в $\text{Pic}(S^\sim)$, обозначаемый $\lambda(n, \mu)$, такой, что

$$\phi^*(\lambda(n, \mu)) \equiv e^*(nC_0 + S_0) - s_0^\perp - \sum_{0 \leq i \leq 3} \mu_i r_i^\perp. \quad (8)$$

2.6. ТЕОРЕМА. Для любых (n, μ) таких, как в п. 2.4, предположим, что $C^\sim$ – рациональная неприводимая кривая в $|\lambda(n, \mu)|$, $j: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow C^\sim$ – ее десингуляризация, и рассмотрим произведение слоев, $\hat{\Gamma} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times_{C^\sim} \phi^*(C^\sim)$, отображения j и ограничение $\phi: S^\perp \rightarrow S^\sim$ на $\phi^*(C^\sim)$. Тогда первая проекция $\hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ определяет гиперэллиптическую инволюцию на $\hat{\Gamma}$, оставляющую неподвижной гладкую точку $p := \hat{\Gamma} \cap s_0^\perp$, в то время как композиция второй проекции $\hat{\Gamma} \rightarrow \phi^*(C^\sim)$ с $\pi_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow X$ является минимально-гиперэллиптическим касательным накрытием, $\hat{\pi}: (\hat{\Gamma}, p) \rightarrow (X, q)$, степени n , типа μ и арифметического рода $\hat{g} := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$.

2.7. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пусть $j: (\Gamma, p) \rightarrow (\hat{\Gamma}, p)$ – некоторый отмеченный морфизм степени 1. Тогда $\pi := \hat{\pi} \circ j: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ также является гиперэллиптическим касательным накрытием степени n и типа μ , но арифметический род меньше или равен $\frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$ (равенство достигается, если j – изоморфизм).

2) Обратно, для любого гиперэллиптического касательного накрытия $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ степени n и типа μ его канонический образ в $S^\sim$, $\phi \circ i^\perp(\Gamma)$, является неприводимой рациональной кривой в $|\lambda(n, \mu)|$. Причем если $\hat{\pi}: (\hat{\Gamma}, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие (степени n , типа μ и арифметического рода $\hat{g} := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$), канонически ассоциированное с $\phi \circ i^\perp(\Gamma)$, то π , очевидно, факторизуется посредством $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}$ – минимально-гиперэллиптическое накрытие (п. 1.11).

¹В оригинале “fits in (with $n \in \mathbb{N}$)”. – Прим. перев.

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любой пары (n, μ) такой, как в п. 2.4, обозначим через $R(n, \mu, X)$ множество классов эквивалентности гиперэллиптических касательных накрытий степени n , типа μ и арифметического рода $g := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$.

2.9. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) В соответствии с п. 2.7, каждое гиперэллиптическое касательное накрытие степени n и типа μ изоморфно частичной десингуляризации единственного элемента $R(n, \mu, X)$. В частности, $\pi \in R(n, \mu, X)$ тогда и только тогда, когда π является минимально-гиперэллиптическим касательным накрытием степени n и типа μ .

2) Для любого гиперэллиптического касательного накрытия, $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$, степени n и типа μ арифметический род кривой Γ меньше или равен $\frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$, причем равенство достигается только при $\pi \in R(n, \mu, X)$.

3) Мы, в результате, узнали из п. 2.6, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством $R(n, \mu, X)$ и множеством рациональных неприводимых кривых в $S^\sim$, линейно эквивалентных $\lambda(n, \mu)$.

4) На самом деле для любой рациональной кривой $C^\sim \in |\lambda(n, \mu)|$ соответствующий нормирующий морфизм $j: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow C^\sim \subset S^\sim$ не может быть деформирован [38; §4.10], что подразумевает следующий результат.

2.10. ТЕОРЕМА. Для любой эллиптической кривой (X, q) и любой пары $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$ таких, что вектор μ является n -подходящим, множество $R(n, \mu, X)$, определенное в п. 2.8, конечно (но может оказаться и пустым).

3. О счетности множества исключительных дивизоров на рациональных поверхностях $S^\sim$ [38]

Выберем некоторый слой ℓ расслоения $\pi_S: S \rightarrow X$ над дополнением к $(X, q)_2 = \{\omega_i\}$, и пусть $r_i^\sim$ и $s_i^\sim$ ($i = 0, \dots, 3$) – редуцированные образы $r_i^\perp$ и $s_i^\perp$ в $S^\sim$. Для любого дивизора D в S обозначим через $D^\perp (\subset S^\perp)$ его отображение при действии $e: S^\perp \rightarrow S$ и через $D^\sim$ – редуцированный образ $D^\perp$ в $S^\sim$, $D^\sim := \phi(D^\perp)$ (п. 2.1).

3.1. ЛЕММА. 1) Поверхность $S^\sim$ рациональна.

2) Группа $\text{Pic}(S^\sim)$ – свободная группа ранга 10, и 10 дивизоров

$$\{C_0^\sim, \ell^\sim, S_i^\sim = \pi_S^*(\omega_i)^\sim, r_i^\sim, i = 0, \dots, 3\}$$

образуют ее $\mathbb{Z}$ -базис.

3) Для любых $i = 0, \dots, 3$ кривая $\ell^\sim$ линейно (и численно) эквивалентна $\ell^\sim \equiv 2S_i^\sim + r_i^\sim + s_i^\sim$.

4) Для любых $n \geq 1$ и n -подходящих $\mu \in \mathbb{N}^4$ класс линейной эквивалентности $\lambda(n, \mu)$, определенной в п. 2.5, содержит дивизор

$$n(C_0^\sim + 2\ell^\sim) - (n-1)S_0^\sim - \frac{1}{2}(n + \mu_0 - 1)r_0^\sim - \sum_{1 \leq j \leq 3} \left\{ nS_j^\sim + \frac{1}{2}(n + \mu_j)r_j^\sim \right\}. \quad (9)$$

5) Для любой пары (n, μ) из п. 3.1.4 и любого дивизора $D \in |\lambda(n, \mu)|$ существуют число $m \geq 0$, целочисленный m -подходящий вектор $(\nu_i) = \nu \in \mathbb{N}^4$ и неприводимая кривая $C^\sim$ такие, что:

- $C^\sim \in |\lambda(m, \nu)|$;

- $\mu_i \leq \nu_i$ для $0 \leq i \leq 3$;
- $m \leq n$ и $m \equiv n \pmod{2}$;
- $\mu^{(2)} \leq \nu^{(2)} \leq 2m + 1 \leq 2n + 1$;
- D представляется в виде

$$D = C^\sim + (n - m)C_0^\sim + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} \{(n - m)s_i^\sim + (\nu_i - \mu_i)r_i^\sim\}.$$

3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко вывести из п. 3.1.5), что для непустоты $|\lambda(n, \mu)|$ необходимо наложить условие $\mu^{(2)} \leq 2n + 1$. Мы вычислим далее размерность $|\lambda(n, \mu)|$ и, в частности, приведем числовой критерий того, что целый дивизор $S^\sim$ принадлежит $|\lambda(n, \mu)|$.

3.3. ЛЕММА. Пусть K , $K^\perp$ и $K^\sim$ – канонические дивизоры в S , $S^\perp$ и $S^\sim$ соответственно. Выберем такую пару $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$, что μ – n -подходящий вектор (см. п. 2.4). Тогда

- 1) оба дивизора $e^*(K)$ и $\phi^*(K^\sim)$ линейно эквивалентны $K^\perp - \sum_{0 \leq i \leq 3} (s_i^\perp + r_i^\perp)$;
- 2) $K^\sim \cdot K^\sim = 0$, $\lambda(n, \mu) \cdot K^\sim = -1$ и $\lambda(n, \mu)^2 = \frac{1}{2}(2n - 1 - \mu^{(2)})$;
- 3) любой неприводимый дивизор $D \in |\lambda(n, \mu)|$ удовлетворяет равенству $D \cdot K^\sim = -1$ (кроме того, $D \cdot \ell^\sim = n$, $D \cdot r_i^\sim = \mu_i$ для $i = 0, \dots, 3$), пересекает $s_0^\sim$ и его арифметический род равен $\rho_a(D) := \frac{1}{4}(2n + 1 - \mu^{(2)})$. Обратно, для любого неприводимого дивизора $D \subset S^\sim$, удовлетворяющего равенству $D \cdot K^\sim = -1$ и пересекающего $s_0^\sim$, положим $m := D \cdot \ell^\sim$ и $\nu_i := D \cdot r_i^\sim$ (для любых $i = 0, \dots, 3$). Тогда m – натуральное число, вектор $\nu = (\nu_i) \in \mathbb{N}^4$ является m -подходящим и $D \in |\lambda(m, \nu)|$.

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$ – произвольная пара такая, что μ является n -подходящим. Тогда проективное пространство $|\lambda(n, \mu)|$ пусто, если $2n + 1 < \mu^{(2)}$, и имеет размерность $\dim |\lambda(n, \mu)| = \frac{1}{4}(2n + 1 - \mu^{(2)})$ в противном случае. При этом если $2n + 1 \geq \mu^{(2)}$, то элемент общего положения в $|\lambda(n, \mu)|$ является гладкой неприводимой кривой рода $\frac{1}{4}(2n + 1 - \mu^{(2)})$.

3.5. СЛЕДСТВИЕ. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\bigcup_{(n, \mu)} R(n, \mu, X)$ (классов изоморфизмов минимально-гиперэллиптических касательных накрытий над (X, q)) и множеством рациональных кривых $C^\sim$ в $S^\sim$, пересекающих $s_0^\sim$ и $\ell^\sim$ и таких, что $C^\sim \cdot K^\sim = -1$.

4. Исключительные накрытия; другие случаи

4.1. Напомним, прежде всего, что под исключительным накрытием гладкой проективной поверхности мы понимаем неприводимый дивизор D , изоморфный $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ и такой, что $D \cdot D = -1$ в самопересечениях. Выберем некоторый вектор $\mu \in \mathbb{N}^4$ такой, что $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \pmod{2}$. Тогда $2n + 1 := \mu^{(2)}$ – нечетное число, μ является n -подходящим, $\dim |\lambda(n, \mu)| = 0$ и единственный эффективный дивизор в $|\lambda(n, \mu)|$ – исключительная кривая $S^\sim$, обозначаемая далее $C_\mu^\sim$. Эти исключительные кривые могут быть исчерпывающе охарактеризованы как так называемые исключительные (гиперэллиптические касательные) накрытия.

4.2. ТЕОРЕМА [38; §5]. Пусть вектор $\mu \in \mathbb{N}^4$ такой, как в п. 4.1, $n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} - 1)$, и пусть $C_\mu^\sim$ обозначает единственную исключительную кривую в $S^\sim$, линейно эквивалентную $\lambda(n, \mu)$. Тогда $C_\mu^\sim$ пересекает $s_0^\sim$ и $\ell^\sim$ и выполняются следующие равенства: $C_\mu^\sim \cdot s_0^\sim = 1$, $C_\mu^\sim \cdot \ell^\sim = n$, $C_\mu^\sim \cdot r_i^\sim = \mu_i$, $i = 0, \dots, 3$.

Обратно, пусть дана некоторая исключительная кривая $C^\sim$ на $S^\sim$; если $C^\sim$ пересекает $s_0^\sim$ и $\ell^\sim$, то $C^\sim \cdot s_0^\sim = 1$.

Кроме того, целочисленный вектор $\nu = (\nu_i) = (C^\sim \cdot r_i^\sim)$ — m -подходящий при $m := C^\sim \cdot \ell^\sim$, $\nu^{(2)} = 2m + 1$ и $C^\sim = C_\nu^\sim$.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [38; §6.2]. Пусть $\mu \in \mathbb{N}^4$ и $C_\mu^\sim$ такие, как в п. 4.2. Рассмотрим кривую $C_\mu^\perp := \phi^*(C_\mu^\sim) \subset S^\perp$, снабженную гладкой точкой $p_\mu := C_\mu^\perp \cap s_0^\perp = \phi^{-1}(C_\mu^\sim \cap s_0^\sim)$. Тогда отмеченная проекция $\pi_\mu: (C_\mu^\perp, p_\mu) \rightarrow (X, q)$, получаемая ограничением $\pi_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow X$ на $C_\mu^\perp$, является минимально-гиперэллиптическим касательным накрытием типа μ , степени $n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} - 1)$ и арифметического рода $= \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$ (ср. с п. 2.6). Будем называть π_μ *исключительным накрытием* типа μ над (X, q) .

4.4. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ — гиперэллиптическое касательное накрытие степени n и типа μ . Следующие свойства эквивалентны при условии выполнения равенства $2n + 1 = \mu^{(2)}$ (ср. с [38; §6.1]):

- i) канонический морфизм $i^\perp: \Gamma \rightarrow S^\perp$ является вложением;
- ii) π — минимально-гиперэллиптическое накрытие и $\phi(i^\perp(\Gamma))$ — исключительная кривая в $S^\sim$;
- iii) арифметический род Γ равен $\frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$ и $\phi(i^\perp(\Gamma)) = C_\mu^\sim$;
- iv) π изоморфно исключительному накрытию π_μ .

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем на множестве $\{(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4, \mu - n\text{-подходящий вектор и } \mu^{(2)} \leq 2n + 1\}$ следующее частичное упорядочение: (m, ν) меньше (n, μ) (обозначение: $(m, \nu) \prec (n, \mu)$) тогда и только тогда, когда $n - m \in 2\mathbb{N}$ и $\nu - \mu \in 2\mathbb{N}^4$. В последнем случае имеет место следующее разложение:

$$\lambda(n, \mu) \equiv \lambda(m, \nu) + (n - m)C_0^\sim + \frac{n - m}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} (\nu_i - \mu_i)r_i^\sim. \quad (10)$$

К тому же эффективный дивизор $\lambda(n, \mu) - \lambda(m, \nu)$ определяет инъективное отображение $|\lambda(m, \nu)|$ как проективное подпространство в $|\lambda(n, \mu)|$. Мы будем отождествлять $|\lambda(m, \nu)|$ с его образом в $|\lambda(n, \mu)|$ (всякий раз, когда $(m, \nu) \prec (n, \mu)$).

4.6. ЛЕММА [38; §5.2]. Пусть пара $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$ такова, что μ есть n -подходящий вектор и $\mu^{(2)} \leq 2n + 1$, и пусть $D \subset S^\sim$ — некоторый эффективный дивизор, линейно эквивалентный $\lambda(n, \mu)$. Тогда D является приводимым тогда и только тогда, когда существуют такие $(m, \nu) \prec (n, \mu)$ ($(m, \nu) \neq (n, \mu)$), что $D \in |\lambda(m, \nu)| \subset |\lambda(n, \mu)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, D приводим тогда и только тогда, когда приводим $\tau^\perp$ -инвариантный дивизор $S^\perp$, $\phi^*(D)$. С другой стороны, $e_*(\phi^*(D))$ есть τ -инвариантный дивизор S , линейно эквивалентный $nC_0 + S_0$. Отсюда следует существование такого $m \leq n$, $m \equiv n \pmod{2}$, и такого τ -инвариантного дивизора

$\Gamma \in |mC_0 + S_0|$, что $e_*(\phi^*(D))$ раскладывается как $\Gamma + (n - m)C_0$. Мы можем восстановить $\phi^*(D)$ по $\Gamma + (n - m)C_0$:

$$\phi^*(D) = \Gamma^\perp + (n - m)C_0^\perp \pmod{\langle s_i^\perp, r_i^\perp, i = 0, \dots, 3 \rangle},$$

где через $\Gamma^\perp$ и $C_0^\perp$ обозначены $\tau^\perp$ -инвариантные точные отображения Γ и C_0 в $S^\perp$. В частности, редуцированный образ $\Gamma^\perp$ в $S^\sim$ принадлежит $|\lambda(m, \nu)|$, где $\nu = (\nu_i)$ – тип $\Gamma^\perp$, т.е. $\nu_i := \Gamma^\perp \cdot r_i^\perp$ при $i = 0, \dots, 3$, и

$$D = \phi(\Gamma^\perp) + (n - m)C_0^\sim + \frac{1}{2}(n - m) \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} (\nu_i - \mu_i) r_i^\sim \in |\lambda(n, \mu)|.$$

Таким образом, мы получили каноническое разложение D в виде суммы неприводимого дивизора $\phi(\Gamma^\perp) \in |\lambda(m, \nu)|$ и другого эффективного слагаемого $\equiv \lambda(n, \mu) - \lambda(m, \nu)$. Следовательно, $(m, \nu) \prec (n, \mu)$. Поэтому D приводим, если и только если $(m, \nu) \neq (n, \mu)$. В последнем случае D принадлежит естественному образу $|\lambda(m, \nu)|$ в $|\lambda(n, \mu)|$.

4.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любой пары (n, μ) , где μ является n -подходящим вектором и $2n + 1 \geq \mu^{(2)}$, элемент общего положения в $|\lambda(n, \mu)|$ – неприводимый дивизор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует только конечное число таких пар (m, ν) , что $(m, \nu) \prec (n, \mu)$ и $(m, \nu) \neq (n, \mu)$. Для каждой из них

$$\dim |\lambda(m, \nu)| = \frac{1}{4}(2m + 1 - \nu^{(2)}) < \frac{1}{4}(2n + 1 - \mu^{(2)}) = \dim |\lambda(n, \mu)|.$$

В частности, объединение соответствующих собственно проективных подпространств, $\bigcup_{(m, \nu)} |\lambda(m, \nu)|$, которые, в соответствии с п. 4.6, параметризуют приводимые дивизоры в $|\lambda(n, \mu)|$, является замкнутым собственным подмножеством. Следовательно, элемент общего положения в $|\lambda(n, \mu)|$ неприводим.

4.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $2n + 1 > \mu^{(2)}$. Тогда полная линейная система $|\lambda(n, \mu)|$ обладает единственной базисной точкой. Эта базисная точка принадлежит $s_0^\sim$ и является гладкой точкой любого элемента $x \in |\lambda(n, \mu)|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним сначала, что

$$\lambda(n, \mu) \equiv \lambda(n - 2, \mu) + 2C_0^\sim + \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim$$

и

$$\lambda(n, \mu) \cdot C_0^\sim = \lambda(n, \mu) \cdot s_j^\sim = s_0^\sim \cdot s_j^\sim = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, 3,$$

но $s_0^\sim \cdot C_0^\sim = 1$. В частности,

$$h^\circ(\mathcal{O}_{C_0^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim)) = 0.$$

Следовательно, соответствующий дивизор $D^\sim = 2C_0^\sim + \sum_{1 \leq j \leq 3} s_j^\sim$; значит,

$$h^\circ(\mathcal{O}_{D^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim)) = 0.$$

Поэтому из последовательности когомологий, ассоциированной с точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n-2, \mu)) \rightarrow \mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim) \rightarrow \mathcal{O}_{D^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim) \rightarrow 0, \quad (11)$$

следует, что

$$h^\circ(\mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim)) = h^\circ(\mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n-2, \mu)))$$

($= h^\circ(\mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu))) - 1$ ввиду п. 3.4). С другой стороны, точна следующая последовательность:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim) \rightarrow \mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu)) \rightarrow \mathcal{O}_{s_0^\sim}(\lambda(n, \mu)) \rightarrow 0. \quad (12)$$

Поскольку $H^\circ(\mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu) - s_0^\sim))$ инъективно отображается как гиперплоскость $H^\circ(\mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu)))$, то образ $H^\circ(\mathcal{O}_{S^\sim}(\lambda(n, \mu)))$ в $H^\circ(\mathcal{O}_{s_0^\sim}(\lambda(n, \mu)))$ является подпространством размерности 1. При этом, поскольку $\lambda(n, \mu) \cdot s_0^\sim = 1$, каждый приводимый дивизор в $|\lambda(n, \mu)|$ пересекает $s_0^\sim$ только в одной и той же точке $s_0^\sim$. Последняя является гладкой точкой любого элемента $|\lambda(n, \mu)|$.

Докажем, наконец, индукцией по n , что $|\lambda(n, \mu)|$ не имеет другой базисной точки. Действительно, предположим, что $2n+1-\mu^{(2)}=4$; в этом случае $\lambda(n, \mu)^2 = \frac{1}{2}(2n-1-\mu^{(2)})=1$. Следовательно, любые два неприводимые элемента $|\lambda(n, \mu)|$ могут пересекаться только в одной точке, и эта точка является единственной базисной точкой, которая уже найдена. Предположим, далее, что $2n+1-\mu^{(2)}>4$ (следовательно, $2(n-2)+1-\mu^{(2)} \geq 4$) и что $|\lambda(n-2, \mu)|$ имеет единственную базисную точку (в $s_0^\sim$). Известно, что для любого $x \in |\lambda(n-2, \mu)|$

$$x + 2C_0^\sim + \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim \in |\lambda(n, \mu)|.$$

Очевидно, что любая базисная точка $|\lambda(n, \mu)|$ может лежать в $C_0^\sim$ или $s_i^\sim$ ($i=0, \dots, 3$). Также известно, что

$$\lambda(n, \mu) \cdot C_0^\sim = \lambda(n, \mu) \cdot s_j^\sim = 0 \quad (j=1, 2, 3).$$

Следовательно, каждая базисная точка $|\lambda(n, \mu)|$ может лежать в $s_0^\sim$ и должна поэтому совпадать с ранее найденной.

4.9. СЛЕДСТВИЕ. Для любых $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$ таких, что μ — n -подходящий вектор, элемент общего положения в $|\lambda(n, \mu)|$ является гладкой неприводимой кривой рода $\frac{1}{4}(2n+1-\mu^{(2)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $2n+1 < \mu^{(2)}$, то $|\lambda(n, \mu)|$ пусто и утверждение тривиально. Если же $2n+1 = \mu^{(2)}$, то единственный элемент $|\lambda(n, \mu)|$ является исключительной кривой (см. п. 4.1). Следовательно, эта кривая является гладкой, неприводимой кривой рода $0 = \frac{1}{4}(2n+1-\mu^{(2)})$. Если $2n+1 > \mu^{(2)}$, то утверждение следует из предложения 4.8 и теоремы Бертини п. 3.3.3).

4.10. Изучение рациональных кривых $x \in |\lambda(n-2, \mu)|$ при любых парах (n, μ) , удовлетворяющих неравенству $2n+1 > \mu^{(2)}$, представляется, вообще говоря, более трудным. Мы ограничимся в этом плане рассмотрением “первого неисключительного

случая": $2n+1-\mu^{(2)} = 4$. В этом случае, $\dim |\lambda(n, \mu)| = 1$, элемент общего положения в $|\lambda(n, \mu)|$ представляет собой эллиптическую кривую и существует единственная базисная точка (зависящая только от n), обозначаемая через $b(n) \in s_0^\sim$. Напомним также (п. 4.1), что $C_\mu^\sim$, единственный элемент в $|\lambda(n-2, \mu)|$, является исключительной кривой и $y_\infty := C_\mu^\sim + 2C_0^\sim + \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim$ принадлежит $|\lambda(n, \mu)|$. Раздувая базисную точку $b(n)$, мы получаем поверхность $S_n^\sim$, снабженную моноидальным отображением $S_n^\sim \rightarrow S^\sim$ и естественной проекцией $S_n^\sim \rightarrow |\lambda(n, \mu)| \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. В $S_n^\sim$ точное отображение $C_\mu^\sim$ все еще является исключительной кривой. Стягивая ее, мы получаем в результате рациональную эллиптическую поверхность $S_{(n, \mu)}^\sim \rightarrow |\lambda(n, \mu)| \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ с пикаровской группой $\text{Pic}(S_{(n, \mu)}^\sim) \cong \mathbb{Z}^{10}$. Следовательно, характеристика Эйлера–Пуанкаре многообразия $S_{(n, \mu)}^\sim$ равна $\chi(S_{(n, \mu)}^\sim) = 12$, и слой над y_∞ равен $2C_0^\sim + \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim$, где через $C_0^\sim$ и $s_i^\sim$ ($i = 0, \dots, 3$) обозначены их образы в $S_{(n, \mu)}^\sim$. Последние кривые имеют следующую диаграмму пересечений (в $S_{(n, \mu)}^\sim$):

$$C_0^\sim \cdot C_0^\sim = s_i^\sim \cdot s_i^\sim = -2, \quad C_0^\sim \cdot s_i^\sim = 1, \quad s_i^\sim \cdot s_j^\sim = 1 \quad (\text{если } i \neq j). \quad (13)$$

4.11. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Для любого $y \in |\lambda(n, \mu)|$ обозначим через χ_y его характеристику Эйлера–Пуанкаре (ЕР-характеристику). Мы знаем, что общий слой пучка $S_{(n, \mu)}^\sim \rightarrow |\lambda(n, \mu)|$ является эллиптической кривой. Следовательно, функция $y \mapsto \chi_y$ обращается в нуль в конечном числе точек $|\lambda(n, \mu)|$, и так называемая формула Лефшеца (ср. [23; с. 509]) утверждает, что

$$12 = \chi(S_{(n, \mu)}^\sim) = \sum_{y \in |\lambda(n, \mu)|} \chi_y. \quad (14)$$

2) ЕР-характеристика $\chi_y \neq 0$, если и только если многообразие y приводимо или неприводимо, но сингулярно. Обозначим через Red (соответственно Irr) подмножество приводимых (соответственно неприводимых, но сингулярных) слоев. В частности, слой $y_\infty = 2C_0^\sim + \sum_{0 \leq i \leq 3} s_i^\sim$ принадлежит Red и все его неприводимые компоненты изоморфны $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Как следует из диаграммы пересечений (13), $\chi_{y_\infty} = 6$. Остальные приводимые слои ($\text{Red} \setminus \{y_\infty\}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с индексами $i = 0, \dots, 3$, для которых $\mu_i = 0$ (п. 4.6). Зададим один из таких индексов i_0 и определим целочисленный вектор $(\vec{e}_{i_0}(j)) \in \mathbb{N}^4$ по формуле $\vec{e}_{i_0}(j) = \delta_{i_0 j}$, $j = 0, \dots, 3$. Поскольку $\mu_{i_0} = 0$, то можно легко проверить, что $(n, \mu + 2\vec{e}_{i_0}) < (n, \mu)$. При этом исключительная кривая $C_{\mu+2\vec{e}_{i_0}}^\sim$ является единственным элементом в $|\lambda(n, \mu + 2\vec{e}_{i_0})|$, приводимая кривая $y_{i_0} := C_{\mu+2\vec{e}_{i_0}}^\sim + r_{i_0}^\sim$ принадлежит $|\lambda(n, \mu)|$ и

$$r_{i_0}^\sim \cdot r_{i_0}^\sim = -r_{i_0}^\sim \cdot C_{\mu+2\vec{e}_{i_0}}^\sim = -2.$$

Следовательно, либо $r_{i_0}^\sim$ пересекает $C_{\mu+2\vec{e}_{i_0}}^\sim$ в двух различных точках и $\chi_{y_{i_0}} = 2$, либо $r_{i_0}^\sim$ касается $C_{\mu+2\vec{e}_{i_0}}^\sim$ и $\chi_{y_{i_0}} = 3$.

3) С другой стороны, Irr определяется как подмножество всех сингулярных неприводимых дивизоров в $|\lambda(n, \mu)|$. Арифметический род любого $y \in |\lambda(n, \mu)|$ равен $\frac{1}{4}(2n+1-\mu^{(2)}) = 1$, и мы заключаем, что Irr состоит из всех неприводимых рациональных кривых в $|\lambda(n, \mu)|$. Каждая такая кривая $y \in \text{Irr}$ должна иметь единственную сингулярную точку – либо узел, в этом случае $\chi_y = 1$, либо клов,

тогда $\chi_y = 2$. Обозначим, как обычно, через $R(n, \mu, X)$ множество классов эквивалентности минимально-гиперэллиптических касательных накрытий степени n и типа μ над (X, q) . Принимая во внимание уравнение (14) и сделанные выше замечания относительно χ_y при $y \in \text{Red} \cup \text{Irr}$, мы немедленно получаем следующие ограничения для $\#R(n, \mu, X)$, размерности $R(n, \mu, X)$.

4.12. ТЕОРЕМА. *Для любой пары $(n, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^4$ такой, что μ является n -подходящим и $\mu^{(2)} = 2n - 3$, $\#R(n, \mu, X)$ ограничено следующим образом:*

- 1) $\#R(n, \mu, X) = 0$, если $\#\{i, \mu_i = 0\} = 3$;
- 2) $0 \leq \#R(n, \mu, X) \leq 2$, если $\#\{i, \mu_i = 0\} = 2$;
- 3) $2 \leq \#R(n, \mu, X) \leq 4$, если $\#\{i, \mu_i = 0\} = 1$;
- 4) $3 \leq \#R(n, \mu, X) \leq 6$, если $\#\{i, \mu_i = 0\} = 0$.

4.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенства п. 4.12.2) могут быть улучшены. Действительно, в доказательстве п. 9.4 будет приведена конструкция двух различных (непримитивных) элементов $R(n, \mu, X)$, в то время как $\#\{i, \mu_i = 0\} = 2$. Следовательно, $\#R(n, \mu, X) = 2$ (если $\#\{i, \mu_i = 0\} = 2$).

5. Канонические θ -характеристики и их потенциалы:

случай $\mu^{(2)} = 2n + 1$ [41]

5.1. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – некоторое гиперэллиптическое касательное накрытие степени $n \geq 1$. Напомним, что для любого $\xi \in W(\Gamma)$ прообраз канонического тэта-дивизора Θ_Γ по действию орбитного морфизма

$$\text{Orb}_\xi: X \rightarrow W(\Gamma), \quad q' \mapsto \xi(\pi^*(q' - q)) = \xi \otimes \mathcal{O}_\Gamma(\pi^*(q' - q)),$$

является дивизором степени n в X ,

$$\text{Orb}_\xi^*(\Theta_\Gamma) = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

При этом $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ принадлежит $\text{KdV}(n, X)$, а именно, n -му КдВ-локусу, и единственным образом определяется классом изоморфизмов данных $(\pi; \xi)$ (см. [1] или [38; § 2.7, 2.9]). Также известно, что эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с $(\pi; \xi)$, равен

$$u_\xi(x) = 2 \sum_{i=1}^n \wp(x - \alpha_i)$$

(п. 1.9 или [39; § 7.10]). Более того, для любого $\alpha = q' - q \in \text{Jac } X (\simeq X)$ эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с $\xi(\pi^*(q' - q))$, равен

$$2 \sum_{i=1}^n \wp(x - (\alpha_i - \alpha)).$$

Другими словами,

$$u_{\xi(\pi^*(q'-q))}(x) = u_\xi(x + \alpha).$$

Нахождение $\text{Orb}_\xi^*(\Theta_\Gamma)$ позволяет вычислить кратность пересечения Θ_Γ с $\text{Orb}_\xi(X)$ в любой точке $\xi' = \text{Orb}_\xi(q')$, $q' \in X$. Нашим основным инструментом (п. 5.4) является непосредственное следствие такой ограниченной версии формулы Фэя–Сигала–Вильсона.

5.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие и ξ – произвольная точка $W(\Gamma)$. Тогда кратность пересечения Θ_Γ и $\text{Orb}_\xi(X)$ в ξ равна

$$\text{mult}_\xi(\Theta_\Gamma, \text{Orb}_\xi(X)) = \begin{cases} (2h^\circ(\xi) - 1) \cdot h^\circ(\xi), & \text{если } h^\circ(\xi) > h^\circ(\xi(-p)), \\ (2h^\circ(\xi) + 1) \cdot h^\circ(\xi), & \text{если } h^\circ(\xi) = h^\circ(\xi(-p)). \end{cases} \quad (15)$$

5.3. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Из формулы (15) следует, что кратность пересечения является треугольным числом, которое возрастает с увеличением $h^\circ(\xi)$. В частности, если $h^\circ(\xi(-mp)) > 0$ для некоторого $m \geq 0$, то мы получаем следующую нижнюю границу:

$$\text{mult}_\xi(\Theta_\Gamma, \text{Orb}_\xi(X)) \geq \frac{1}{2}(m+1)(m+2). \quad (16)$$

2) Для любого $i = 0, \dots, 3$ $\xi_i := \xi(\pi^*(\omega_i - \omega_0))$ обладает той же X -орбитой, что и ξ , соответствующий потенциал равен $u_{\xi_i}(x) \equiv u_\xi(x - \omega_i)$ и

$$\sum_{i=0}^3 \text{mult}_{\xi_i}(\Theta_\Gamma, \text{Orb}_\xi(X)) \leq \Theta_\Gamma \cdot \text{Orb}_\xi(X) = \deg(\pi) = n. \quad (17)$$

3) Дивизоры $\{2np, 2\pi^*(\omega_i), i = 0, \dots, 3\}$ имеют одну и ту же степень и являются неподвижными точками при действии гиперэллиптической инволюции кривой Γ . Следовательно, они линейно эквивалентны. Обозначив через g арифметический род Γ и зная, что канонический пучок равен $\omega_\Gamma \simeq \mathcal{O}_\Gamma((2g-2)p)$, мы заключаем, что обратимые пучки:

$$\begin{aligned} \xi_{A,i} &= \mathcal{O}_\Gamma((g-1)p + \pi^*(\omega_i - q)), \\ \xi_{B,i} &= \mathcal{O}_\Gamma((g-1-n)p + \pi^*(\omega_i)), \end{aligned} \quad i = 0, \dots, 3, \quad (18)$$

являются θ -характеристиками на Γ . Если π – исключительное накрытие, мы можем найти соответствующий эллиптический конечно-зонный потенциал, как это будет показано далее (ш. 5.4, 5.5). Первым основным результатом в этом направлении является нахождение общей нижней границы для соответствующих кратностей пересечения, полученной в результате непосредственного применения ш. 5.2 и 5.3.1) (этот результат справедлив только для минимально-гиперэллиптических касательных накрытий). Благодаря тому, что при $j = 1, 2, 3$ $\xi_{A,j}$ и $\xi_{B,j}$ принадлежат $\text{Orb}_{\xi_{A,0}}(X)$ и $\text{Orb}_{\xi_{B,0}}(X)$ соответственно, удастся вычислить $u_{\xi_{A,0}}$ и $u_{\xi_{B,0}}$ (см. п. 5.3.2)).

5.4. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – некоторое минимально-гиперэллиптическое касательное накрытие степени n , типа μ и арифметического рода

$g := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$, и пусть $\xi_{A,i}$ и $\xi_{B,i}$ – канонические θ -характеристики, определенные в п. 5.3.3) для любых полупериодов $\omega_i \in (X, q)_2$. Пусть также $m_i^{A,0}$ (соответственно $m_i^{B,0}$) обозначает кратность пересечения

$$m_i^{A,0} := \text{mult}_{\xi_{A,i}}(\Theta_\Gamma, \text{Orb}_{\xi_{A,0}}(X)) \quad (19)$$

(соответственно $m_i^{B,0} := \text{mult}_{\xi_{B,i}}(\Theta_\Gamma, \text{Orb}_{\xi_{B,0}}(X))$).

Тогда $m_0^{A,0} = \frac{1}{2}g(g+1)$ и при $j = 1, 2, 3$ и $i = 0, \dots, 3$ имеют место следующие нижние границы:

$$m_j^{A,0} \geq \frac{1}{2}(g - \mu_0 - \mu_j)(g - \mu_0 - \mu_j + 1), \quad m_i^{B,0} \geq \frac{1}{2}(g - \mu_i)(g - \mu_i + 1). \quad (20)$$

5.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\pi_\mu: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – исключительное накрытие типа μ (степени $n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} - 1)$ и арифметического рода $g := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$). Тогда четные эллиптические конечно-зонные потенциалы, ассоциированные с θ -характеристиками $\xi_{A,0} = \Theta_\Gamma((g-1)p)$ и $\xi_{B,0} = \Theta_\Gamma((g-1-n)p + \pi^*(q))$, соответственно равны:

$$u_{\xi_{A,0}}(x) = g(g+1)\wp(x) + \sum_{1 \leq j \leq 3} (g - \mu_0 - \mu_j)(g - \mu_0 - \mu_j + 1)\wp(x - \omega_j),$$

$$u_{\xi_{B,0}}(x) = \sum_{0 \leq i \leq 3} (g - \mu_i)(g - \mu_i + 1)\wp(x - \omega_i). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что

$$\sum_{0 \leq i \leq 3} (g - \mu_i)(g - \mu_i + 1) = \mu^{(2)} - 1,$$

$$g(g+1) + \sum_{1 \leq j \leq 3} (g - \mu_0 - \mu_j)(g - \mu_0 - \mu_j + 1) = \mu^{(2)} - 1. \quad (22)$$

Применяя формулы нижних границ (20) и п. 5.3.2), мы немедленно заключаем, что

$$\mu^{(2)} - 1 \leq 2 \sum_{0 \leq i \leq 3} m_i^{A,0} \leq 2n,$$

$$\mu^{(2)} - 1 \leq 2 \sum_{0 \leq i \leq 3} m_i^{B,0} \leq 2n. \quad (23)$$

Далее, в нашем (исключительном) случае $\mu^{(2)} - 1$ равно $2n$. Следовательно, при $j = 1, 2, 3$ и $i = 0, \dots, 3$ получаем

$$2m_j^{A,0} = (g - \mu_0 - \mu_j)(g - \mu_0 - \mu_j + 1),$$

$$2m_i^{B,0} = (g - \mu_i)(g - \mu_i + 1), \quad (24)$$

и $u_{\xi_{A,0}}(x)$, так же как и $u_{\xi_{B,0}}(x)$, даны в (21).

5.6. ЗАМЕЧАНИЕ. В соответствии со следствием 5.5, если π – исключительное накрытие, то эллиптические конечно-зонные потенциалы, ассоциированные с множеством θ -характеристик $\{\xi_{A,i}, \xi_{B,i}, i = 0, \dots, 3\}$, могут иметь полюса только в полупериодах кривой (X, q) . Далее будет показано, что это свойство является определяющим для канонических θ -характеристик исключительных накрытий.

5.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – гиперэллиптическое касательное накрытие, и пусть g обозначает арифметический род кривой Γ . Будем говорить, что функция $u(x)$ является *порождающим потенциалом, ассоциированным с π* , если $u(x)$ – эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с данными $(\pi; \mathcal{O}_\Gamma((g-1)p))$.

5.8. ТЕОРЕМА ([40], [41], см. также [18]). *Для любых $(a_i) \in \mathbb{N}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ существует исключительное накрытие $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ такое, что четная функция*

$$u(x) = \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1) \wp(x - \omega_i)$$

является эллиптическим конечно-зонным потенциалом, ассоциированным с одной из восьми канонических θ -характеристик, $\{\xi_{A,i}, \xi_{B,i}, i = 0, \dots, 3\}$, на Γ . Степень π равна

$$n := \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1),$$

а арифметический род Γ равен

$$g := \frac{1}{2} \max \left(2M, 1 + \Sigma - (1 + (-1)^\Sigma) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right), \quad (25)$$

где

$$\Sigma = \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i, \quad M = \max\{a_i\} \quad \text{и} \quad m = \min\{a_i\}.$$

При этом такая функция (5) является порождающим потенциалом, если и только если

$$a_0 = M \quad \text{и} \quad 2M \geq \Sigma - (1 + (-1)^\Sigma)m.$$

ЭСКИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Доказательство, данное в [41; §§ 4.4, 5.3], довольно элементарно и производится следующим образом. Для любых $(a_i) \in \mathbb{N}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ существует специальный вектор $\mu \in \mathbb{N}^4$, задаваемый явной формулой, выведенной в [41; §§ 4.4, 5.4.3], и такой, что μ – n -подходящий с $n := \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1)$ и $\mu^{(2)} = 2n + 1$. Пусть $\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ – исключительное накрытие типа μ и $\{\xi_{A,i}, \xi_{B,i}, i = 0, \dots, 3\}$ – множество θ -характеристик, определенное ранее в п. 5.3.3). Непосредственная проверка формулы (21), проведенная в п. 5.5, показывает, что

$$u(x) = \sum_{0 \leq i \leq 3} a_i(a_i + 1) \wp(x - \omega_i)$$

– эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с $\xi_{A,i}$ или $\xi_{B,i}$ при некотором $i = 0, \dots, 3$. Наконец, арифметический род Γ , как известно, равен $g := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$. Выражая (μ_i) через (a_i) по формуле из [41; §§ 4.4, 5.4.3], мы немедленно получаем выражение (25).

6. Вывод новых эллиптических конечно-зонных потенциалов

6.1. Мы применили в разделе 5 формулу кратности Фей–Сигала–Вильсона (п. 5.2) и формулу для нижних границ (20) к произвольному исключительному накрытию, получив в результате полное описание соответствующих канонических θ -характеристик (п. 5.3.2)) в терминах ассоциированных эллиптических конечно-зонных потенциалов (ш. 5.5, 5.8). На основе результатов п. 5.2, п. 5.4 (формула (20)) и ш. 5.5, 5.8 мы исследуем далее (“первый неисключительный”) случай $\mu^{(2)} = 2n - 3$ и находим бесконечное семейство четных эллиптических конечно-зонных потенциалов вида (6), где $(a_i) \in \mathbb{N}^4$ и ρ удовлетворяет уравнению (7) (см. п. 6.3).

6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(a_i) \in \mathbb{N}^4$ и $\rho \in X \setminus \{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ таковы, что четная функция (6) является эллиптическим конечно-зонным потенциалом. Тогда ρ удовлетворяет “фундаментальному” уравнению (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $v(x, t)$ единственное решение уравнения КдВ, имеющее в качестве “начального значения” $v(x, 0) \equiv u(x)$. Нами уже показано, что существует множество из $n := 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)$ различных аналитических функций $\{x_k(t), 1 \leq k \leq n\}$ таких, что $v(x, t) = 2 \sum_{k=1}^n \wp(x - x_k(t))$, и дивизор $\sum_{k=1}^n (x_k(t))$ принадлежит $\text{KdV}(n, X)$ при любом $t \in \mathbb{C}$ (см., например, п. 1.9). Следовательно, $\sum_{k=1}^n (x_k(t))$ стремится при $t \rightarrow 0$ к дивизору

$$(\rho) + (-\rho) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)(\omega_i),$$

удовлетворяя (в частности) уравнениям

$$\sum_{k=2}^n \wp'(x_2(t) - x_k(t)) = 0 \quad (t \neq 0).$$

Переходя к пределу ($t \rightarrow 0$) в последнем равенстве, мы получим

$$\sum_{k=2}^n \wp'(x_1(0) - x_k(0)) = \wp'(2\rho) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)\wp'(\rho - \omega_i) = 0.$$

Поскольку из классических формул следует, что $8\wp'(2\rho) = \sum_{i=0}^3 \wp'(\rho - \omega_i)$, мы в результате получаем (7), как и предполагалось.

6.3. ТЕОРЕМА. Пусть $[\pi: (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)] \in R(n, \mu, X)$ – минимально-гиперэллиптическое касательное накрытие типа μ (и, следовательно, арифметического рода $g := \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$) и n – такая степень, что $\mu^{(2)} = 2n - 3$. Тогда для любой канонической θ -характеристики $\xi \in \{\xi_{A,k}, \xi_{B,k}, k = 0, \dots, 3\}$ существуют целочисленный вектор $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ и точка $\rho \in X$ ($2\rho \neq 0$), удовлетворяющие уравнению (7), такие, что эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с $(\pi; \xi)$, определяется по формуле (6).

Пусть $\xi = \xi_{A,k}$ ($\xi = \xi_{B,k}$) и обозначим вектор $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$, появляющийся в (6), как $A^k(\mu)$ (соответственно как $B^k(\mu)$). Тогда $\vec{a} = A^\circ(\mu)$ ($\vec{a} = B^\circ(\mu)$) определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} a_0 = g = \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1) \quad \text{и} \quad a_j = \frac{1}{2}(|\mu^{(1)} - 2\mu_0 - 2\mu_j| - 1) \quad \text{при} \quad j = 1, 2, 3 \\ (\text{соответственно } a_i = \frac{1}{2}(|\mu^{(1)} - 2\mu_i| - 1) \quad \text{при} \quad i = 0, \dots, 3). \end{aligned} \quad (26)$$

Зная, с другой стороны, что $u_{\xi_{A,k}}(x) \equiv u_{\xi_{A,0}}(x - \omega_k)$ и что $u_{\xi_{B,k}}(x) \equiv u_{\xi_{B,0}}(x - \omega_k)$, мы можем вывести из (26) явные формулы для $A^k(\mu)$ и $B^k(\mu)$ ($k = 1, 2, 3$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ξ равно либо $u_{\xi_{A,0}}$, либо $u_{\xi_{B,0}}$, и обозначим через m_i кратность пересечения в точке $\xi_i := \xi(\pi^*(\omega_i - \omega_0))$ ($i = 0, \dots, 3$) между Θ_Γ и $\text{Orb}_\xi(X)$. Выберем $\vec{a}$ равным $A^\circ(\mu)$ (соответственно $B^\circ(\mu)$). Непосредственное вычисление показывает, что в обоих случаях мы имеем

$$\mu^{(2)} - 1 = \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1).$$

С другой стороны, из п. 5.3.2) и формулы для нижней границы (20) следует, что

$$\sum_{i=0}^3 m_i \leq n \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}a_i(a_i + 1) \leq m_i, \quad i = 0, \dots, 3.$$

Следовательно,

$$\mu^{(2)} - 1 = \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1) \leq \sum_{i=0}^3 2m_i \leq 2n.$$

Далее, в рассматриваемом нами случае $\mu^{(2)} - 1 = 2n - 4$, что приводит к неравенствам

$$n - 2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1) \leq \sum_{i=0}^3 m_i \leq n.$$

Мы можем также утверждать, что эллиптический конечно-зонный потенциал $u_\xi(x)$ — четная функция, имеющая (по крайней мере) два полюса вне множества полупериодов $\{\omega_i\}$. В противном случае $u_\xi(x)$ должен был бы быть одним из потенциалов п. 5.8 и π — исключительным накрытием (противоречие!). В результате мы заключаем, что

$$\sum_{i=0}^3 m_i = n - 2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1),$$

в то время как $m_i \geq \frac{1}{2}a_i(a_i + 1)$ при $i = 0, \dots, 3$. Следовательно, $m_i = \frac{1}{2}a_i(a_i + 1)$ при $i = 0, \dots, 3$, как было заявлено, и существует $\rho \in X \setminus \{\omega_i\}$, удовлетворяющее фундаментальному уравнению (7), такое, что $u_\xi(x)$ определяется по формуле (6) (п. 6.2).

6.4. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Каждому $\pi \in R(n, \mu, X)$, определенному, как и ранее (при $n = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)$), мы сопоставили восемь эллиптических конечно-зонных потенциалов в (6). Соответствующие целочисленные векторы $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1) = 2n - 4 = \mu^{(2)} - 1$$

и зависят только от μ и выбора θ -характеристики. Восемь отображений A^k и B^k , $\mu \mapsto \vec{a}$ ($k = 0, \dots, 3$), определяемые каждым выбором, тщательно изучены в [20; § 4 и § 5]: они инъективны и в совокупности заполняют все $\mathbb{N}^4$.

2) Обозначим далее через $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}^4$ подмножество всех возможных типов,

$$\mathbb{M} = \{\mu = (\mu_i) \in \mathbb{N}^4 \mid \mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \pmod{2}\},$$

и через $M^{\#k}$ ($k = 0, \dots, 3$) подмножество $\mathbb{M}$, образованное всеми типами, имеющими k нулевых координат:

$$\mathbb{M}^{\#k} = \{\mu \in \mathbb{M} \mid \#\{j, \mu_j = 0\} = k\}.$$

Напомним, что для любой эллиптической кривой (X, q) и любого типа $\mu \in \mathbb{M}$ множество $R(n, \mu, X)$ ($n = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)$) пусто тогда и только тогда, когда μ принадлежит $\mathbb{M}^{\#3} = \{(2k + 1, 0, 0, 0), k \in \mathbb{N}\}$. С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что $\mu \in \mathbb{M}^{\#3}$ тогда и только тогда, когда для всех $k = 0, \dots, 3$ $A^k(\mu)$ и $B^k(\mu)$ принадлежат $\{(a, a, a, a), a \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно вывести следующее обратное 6.3 утверждение.

6.5. СЛЕДСТВИЕ. Для любого вектора $\vec{a}$, принадлежащего дополнению κ $\{(b, b, b, b), b \in \mathbb{N}\}$ (т.е. $\vec{a} \in \mathbb{N}^4 \setminus (1, 1, 1, 1)\mathbb{N}$), существует число $\rho \in X \setminus \{\omega_i\}$, удовлетворяющее соотношению (7), такое, что (6) – один из эллиптических конечно-зонных “канонически” ассоциированных потенциалов (п. 6.3) с некоторым $\pi \in R(n, \mu, X)$, где μ такое, что $\vec{a} \in \{A^k(\mu), B^k(\mu)\}$, и

$$n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3) = 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого такого $\vec{a}$ существуют $\mu \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}^{\#3}$ и $k \in \{0, \dots, 3\}$ такие, что либо $A^k(\mu) = \vec{a}$, либо $B^k(\mu) = \vec{a}$. При этом множество $R(n, \mu, X)$ ($n = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)$) непусто. Следовательно, эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный в п. 6.3 либо с $(\pi; \xi_{A,k})$, либо с $(\pi; \xi_{B,k})$ при любом $\pi \in R(n, \mu, X)$, определяется по формуле (6) для некоторого ρ из X , удовлетворяющего (7) (п. 6.3).

6.6. ЗАМЕЧАНИЕ. (Случай $\vec{a} \in \{(b, b, b, b), b \in \mathbb{N}\}$.) Предположим обратное, т.е. что $\vec{a} = (b, b, b, b)$ для некоторого $b \in \mathbb{N}$, и выберем $\rho \in X$, удовлетворяющее

$$\sum_{i=0}^3 (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = (2b + 1)^2 \sum_{i=0}^3 \wp'(\rho - \omega_i) = 0.$$

Тогда 2ρ – ненулевой полупериод (поскольку $\sum_{i=0}^3 \wp'(x - \omega_i) \equiv 8\wp'(2x)$) и $u(x) = 2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + b(b+1) \sum_{i=0}^3 \wp(x - \omega_i)$ – непримитивный (п. 1.13, 2)) эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с исключительным накрытием типа $\mu = (2b+1, 2, 0, 0), (2b+1, 0, 2, 0)$ или $(2b+1, 0, 0, 2)$. Подробнее, предположим, что $2\rho = \omega_1$, и обозначим через $\varphi: X \rightarrow X/\langle \omega_1 \rangle =: Y$ каноническую проекцию и через $\widehat{\varphi}: Y \rightarrow X$ – дуальный гомеоморфизм. В частности, $\text{Ker}(\varphi) = \{\omega_0, \omega_1\}$ и композиция φ с $\widehat{\varphi}$ дает “умножение на 2”. Следовательно,

$$\omega'_0 := \varphi(\omega_0) = \varphi(\omega_1), \quad \omega'_1 := \varphi(\omega_2) = \varphi(\omega_3), \quad \omega'_2 := \varphi(\rho), \quad \omega'_3 := \varphi(\rho + \omega_2)$$

– четыре полупериода Y . Аналогично мы можем легко проверить, что

$$\widehat{\varphi}(\omega'_0) = \widehat{\varphi}(\omega'_1) = \omega_0 \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}(\omega'_2) = \widehat{\varphi}(\omega'_3) = \omega_1.$$

Рассмотрим исключительное накрытие $\pi': (\Gamma, p) \rightarrow (Y, q')$ степени $m := b^2 + b + 1$, арифметического рода $g := b + 1$ и типа ν , равного либо $\nu = (b+1, b, 1, 1)$ – если $b \equiv 1 \pmod{2}$, либо $\nu = (b, b+1, 1, 1)$ – если $b \equiv 0 \pmod{2}$. В этом случае эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с алгебраическими данными

$$(\pi'; \xi) := (\pi'; \mathcal{O}_\Gamma((g-1-m)p + (\pi')^*(\omega'_2))),$$

равен (см. п. 5.5):

$$v(y) = b(b+1)\wp_Y(y) + b(b+1)\wp_Y(y - \omega'_1) + 2\wp_Y(y - \omega'_2),$$

где мы обозначили через $\wp_Y$ стандартную $\wp$ -функцию Вейерштрасса кривой (Y, q') . Преобразуя потенциал $v(y)$ с помощью $\varphi: X \rightarrow Y$, мы получаем (с точностью до постоянной) эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с $(\pi; \xi) := (\widehat{\varphi} \circ \pi'; \xi)$ (см. п. 1.14). Теперь мы также знаем, что $\wp_Y(\varphi(x)) \equiv \wp(x) + \wp(x - \omega_1) + \text{const}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \wp_Y(\varphi(x) - \omega'_1) &= \wp_Y(\varphi(x - \omega_2)) \equiv \wp(x - \omega_2) + \wp(x - \omega_3) + \text{const}, \\ \wp_Y(\varphi(x) - \omega'_2) &= \wp_Y(\varphi(x - \rho)) \equiv \wp(x - \rho) + \wp(x - \rho) + \text{const} \end{aligned}$$

(поскольку $-\rho - \omega_1 = \rho$). В результате мы заключаем, что, с точностью до постоянной,

$$u(x) = 2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + b(b+1) \sum_{i=0}^3 \wp(x - \omega_i) = v(\varphi(x))$$

является непримитивным эллиптическим конечно-зонным потенциалом, ассоциированным с алгебраическими данными

$$(\widehat{\varphi} \circ \pi'; \mathcal{O}_\Gamma((g-m-1)p + (\pi')^*(\omega'_2))).$$

В самом деле, тип π' равен $\nu = (b+1, b, 1, 1)$ или $(b, b+1, 1, 1)$, Γ имеет единственную точку Вейерштрасса над ω'_2 , обозначаемую через p'_2 . Следовательно, дивизор $(\pi')^*(\omega'_2)$ линейно эквивалентен $(m-1)p + p'_2$ и потенциал $u(x)$ ассоциирован с $(\widehat{\varphi} \circ \pi'; \mathcal{O}_\Gamma((g-2)p + p'_2))$. Аналогичная конструкция может быть осуществлена и в случае $2\rho = \omega_2$ или $2\rho = \omega_3$.

7. Плоская модель для $\mathcal{R}(n, \mu)$ ($\mu^{(2)} = 2n - 3$)

7.1. Пара функций Вейерштрасса $(\wp, \wp')$ определяет классическое вложение эллиптической кривой $(X, q) = (\mathbb{C}/\Lambda, 0)$ в проективную плоскость: $\forall z \neq q, z \mapsto (\wp(z) : \wp'(z) : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Образ X является замыканием гладкой аффинной кубики $\{y^2 = 4 \prod_{i=1}^3 (x - e_i)\}$, где $e_i = \wp(\omega_i)$, $\sum_{i=1}^3 e_i = 0$ и $e_i \neq e_j$, если $i \neq j$. Непосредственная проверка приводит к следующим двум результатам.

7.2. ЛЕММА. *Функции $\wp$ и $\wp'$ (ассоциированные с решеткой Λ) удовлетворяют следующим функциональным уравнениям при произвольном $\rho \in X$ и $j \in \{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3\}$:*

$$\begin{aligned} (\wp(\rho) - e_j)(\wp(\rho - \omega_j) - e_j) &= (e_k - e_j)(e_\ell - e_j), \\ \wp'(\rho - \omega_j)(\wp(\rho) - e_j)^2 &= -\wp'(\rho)(e_k - e_j)(e_\ell - e_j). \end{aligned} \quad (27)$$

7.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$ и $\rho \in X \setminus \{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ “фундаментальное” уравнение (7) эквивалентно*

$$(2a_0 + 1)^2 \prod_{i=1}^3 (\wp(\rho) - e_i)^2 = \sum_{j=1}^3 (2a_j + 1)^2 (e_k - e_j)(e_\ell - e_j)(\wp(\rho) - e_k)^2 (\wp(\rho) - e_\ell)^2.$$

7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение из п. 7.3 можно интерпретировать как определяющее поверхность степени 6 в проективном пространстве $\{(e_0 : e_1 : e_2 : e_3)\} = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ($e_0 := \wp(\rho)$). Пересечение последнего пространства с гиперплоскостью $\mathbb{H} := \{e_1 + e_2 + e_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ является плоской секстикой, обозначаемой через $\mathcal{C}_{\vec{a}}$.

7.5. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Мы сопоставили каждой паре $(\pi; \xi)$ такой, что $\pi \in R(n, \mu, X)$, $\mu^{(2)} = 2n - 3$ и $\xi \in \{\xi_{A,k}, \xi_{B,k}, k = 0, \dots, 3\}$ (см. п. 6.3), эллиптический конечно-зонный потенциал вида (6), а также, целочисленный вектор $\vec{a} = (a_i)$ и пару точек $\{\rho, -\rho\}$, удовлетворяющих (7). Другими словами, каждая введенная выше θ -характеристика ξ определяет инъективное отображение (п. 1.9) $R(n, \mu, X)$ в $\mathcal{C}_{\vec{a}}$, где $\vec{a} = A^k(\mu)$ (соответственно $\vec{a} = B^k(\mu)$), если $\xi = \xi_{A,k}$ (соответственно $\xi = \xi_{B,k}$).

2) Деформация решетки $\Lambda, \Lambda' = \alpha\Lambda$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$), приводит к изменению локальной координаты с z на αz . Отсюда немедленно следует, что соответствующая $\wp$ -функция Вейерштрасса, а также ее значения $\{e_i = \wp(\omega_i), i = 1, 2, 3\}$ (соответственно $\wp'$) умножаются на α^2 (соответственно на α^3). Преобразованная эллиптическая кривая, $X' = \mathbb{C}/\Lambda'$, изоморфна исходной. Следовательно, $R(n, \mu, X')$ равно $R(n, \mu, X)$ и отображается в то же множество точек $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ (п. 1.12).

7.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $\mathcal{P}$ рациональную проекцию точки $(1 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{H} \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ в проективную прямую $\{e_0 = 0\} \subset \mathbb{H}$ и через $\mathfrak{X}$ – пространство модулей всех эллиптических кривых, фиксированных заданием их полупериодов. Для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ ограничение $\mathcal{P}$ на $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Delta_j$ (где $\Delta_j = \{e_k - e_\ell = 0\}$) определяет конечный морфизм степени 6 на $\{e_0 = 0\} \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Delta_j$ (проективной прямой минус три точки), которая изоморфна $\mathfrak{X}$. Рассмотрим, с другой стороны, одномерное алгебраическое семейство

$$\mathcal{R}(n, \mu) := \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} R(n, \mu, X).$$

Мы можем расширить (восемь) инъективных отображений $R(n, \mu, X) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Delta_j$, определенных в п. 7.5.1) (при $n = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)$), до инъективных морфизмов $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Delta_j$, обозначаемых соответственно $\mathcal{A}^k$ и $\mathcal{B}^k$ ($k = 0, \dots, 3$). Можно также проверить, что все $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ пересекают кубику $\bigcup_{j=1}^3 \Delta_j$ в трех точках

$$O_1 := (1 : -2 : 1 : 1), \quad O_2 := (1 : 1 : -2 : 1) \quad \text{и} \quad O_3 := (1 : 1 : 1 : -2).$$

В частности,

$$\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Delta_j = \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}.$$

7.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $k = 0, \dots, 3$ и $\mu \in \mathbb{M}$ фиксируем $n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)$ и $\vec{a} := A^k(\mu)$ (соответственно $\vec{a} := B^k(\mu)$). Тогда морфизм $\mathcal{A}^k : \mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ (соответственно $\mathcal{B}^k : \mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$) является собственным. В частности, образ $\mathcal{R}(n, \mu)$ является замкнутым подмногообразием в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Композиция одного из описанных морфизмов с рациональной проекцией $\mathcal{P} : \mathbb{H} \dashrightarrow \{e_0 = 0\}$ (п. 7.6), позволяет восстановить каноническое квази-конечное отображение $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$. Утверждение о собственности $\mathcal{A}^k$ и $\mathcal{B}^k$ ($k = 0, \dots, 3$) выводится из собственности $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$. Действительно, пусть $W(n, \nu, X)$ обозначает несвязное объединение компактифицированных якобианов всех элементов конечного множества $R(n, \nu, X)$ ($\nu^{(2)} \leq 2n+1$), и пусть $W(n, X)$ обозначает несвязное объединение

$$W(n, X) := \prod_{\nu^{(2)} \leq 2n+1} W(n, \nu, X).$$

Бирациональный инъективный морфизм, построенный в п. 1.12 и обозначенный через $I_n(X)$, отображает $W(n, X)$ на $\text{KdV}(n, X)$ – замкнутое подмногообразие n -х симметрических степеней X_n , определяемое уравнениями (3).

Варьируя X вдоль всего $\mathfrak{X}$, мы получаем

$$\mathcal{W}(n, \nu) := \bigcup_{\mathfrak{X}} W(n, \nu, X),$$

– алгебраическое семейство компактифицированных якобианов $\mathcal{R}(n, \nu)$, так же как и несвязное объединение

$$\mathcal{W}(n) := \prod_{\nu^{(2)} \leq 2n+1} \mathcal{W}(n, \nu).$$

Рассмотрим также универсальную эллиптическую кривую $\bar{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$, параметризованную соответствующими функциями Вейерштрасса, обозначенными $\wp$ и $\wp'$, и пусть $(\bar{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X})_n$ обозначает их n -ю симметрическую степень. Очевидно, что семейство

$$\mathcal{K}d\mathcal{V}(n) := \bigcup_{\mathfrak{X}} \text{KdV}_n(X)$$

образует замкнутое подмногообразие в $(\overline{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X})_n$, которое может быть определено в терминах $\wp'$, как и в (3). В частности, естественная проекция $\mathcal{K}d\mathcal{V}(n) \rightarrow \mathfrak{X}$ является собственной и $\mathcal{K}d\mathcal{V}(n)$ распадается на несвязное объединение:

$$\mathcal{K}d\mathcal{V}(n) = \coprod_{\nu^{(2)} \leq 2n+1} \mathcal{I}_n(\mathcal{W}(n, \nu)),$$

где $\mathcal{I}_n: \mathcal{W}(n) \rightarrow \mathcal{K}d\mathcal{V}(n)$ глобализует морфизм $I_n(X): W(n, X) \rightarrow \text{KdV}(n, X)$ определенный в п. 1.12. Выбирая такой тип $\mu \in \mathbb{M}$, что $\mu^{(2)} = 2n - 3$, и каноническую θ -характеристику, как и в п. 7.5, мы получаем естественное сечение $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{W}(n, \mu) \subset \mathcal{W}(n)$, которое в композиции с $\mathcal{I}_n$ приводит к замкнутому (собственному) инъективному отображению $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{K}d\mathcal{V}(n)$. Следовательно, проекция $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{K}d\mathcal{V}(n) \rightarrow \mathfrak{X}$ является собственной.

7.8. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Для того чтобы обобщить теорему п. 6.5 (т.е. найти все эллиптические конечно-зонные потенциалы вида (6)), необходимо рассмотреть все множество пространств модулей $\{\mathcal{R}(n, \mu), n = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)\}$. На самом деле, мы докажем, что для любого $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$ существуют (n, μ) и морфизм над $\mathfrak{X}$, $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ (см. п. 7.6), определяющий изоморфизм между $\mathcal{R}(n, \mu)$ и неприводимой компонентой $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$. В частности, степень естественной проекции $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$ будет равна 6, если и только если $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ — неприводимая секстика. Напомним, что, с другой стороны, степень $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$ ограничена числом 4, если $\#\{i, \mu_i = 0\} \geq 1$. Таким образом, для любого такого μ и $\vec{a} \in \{A^k(\mu), B^k(\mu), k = 0, \dots, 3\}$ секстика $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ должна быть приводимой. Наконец, реализуя точное отображение некоторой $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ ($\vec{a} \in \mathbb{N}^4$) в подходящем пучке эллиптических кривых, мы получаем характеризацию множества $\{\vec{a} \in \mathbb{N}^4, \mathcal{C}_{\vec{a}} \text{ приводима}\}$ (п. 8.6).

2) Следующий результат выводится из (п. 9.2): для любого $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$ такого, что $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно независим над $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, и $X \in \mathfrak{X}$ функция (6) является эллиптическим конечно-зонным потенциалом, ассоциированным с некоторыми данными $(\pi; \xi)$ (см. п. 6.3), если и только если $\rho \in X \setminus \{\omega_i\}$ удовлетворяет “фундаментальному” уравнению (7).

3) Множество чисел $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ является линейно зависимым над $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ приводима (п. 8.6). В последнем случае (самое большее) одна из неприводимых компонент $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ соответствует (некоторому) $\mathcal{R}(n, \mu)$. Другие компоненты также приводят к эллиптическим конечно-зонным потенциалам, хотя они связаны с исключительными накрытиями (см. п. 9.6.4)). Другими словами, для любых $(a_i) \in \mathbb{N}^4$ и любой эллиптической кривой (X, q) функция (6) — эллиптический конечно-зонный потенциал тогда и только тогда, когда выполняется условие (7) при $2\rho \neq 0$.

4) Наконец, зная неприводимое разложение некоторой $\mathcal{C}_{\vec{a}}$, мы можем улучшить оценки п. 4.12, вычисляя $\#R(n, \mu, X)$ для общей эллиптической кривой $X = X_{\text{gen}}$. Свойство п. 9.6.2) может быть перефразировано как утверждение о том, что $\#R(n, \mu, X_{\text{gen}}) = 6 - 2j_0$, где j_0 обозначает число нулевых координат в (μ_i) (т.е. $j_0 = \#\{i, \mu_i = 0\}$).

8. Подход эллиптической поверхности в изучении плоской модели $\mathcal{C}_{\vec{a}}$

Отождествим гиперплоскость $\mathbb{H} = \{e_1 + e_2 + e_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ с проективной плоскостью $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \{(e_0 : e_1 : e_2)\}$ и обозначим через O_1, O_2 и O_3 соответственно точки $(1 : -2 : 1)$, $(1 : 1 : -2)$ и $(1 : 1 : 1)$ гиперплоскости $\mathbb{H}$ (или точки $(-2, 1)$, $(1, -2)$ и $(1, 1)$ аффинной плоскости $\{e_0 \neq 0\} \subset \mathbb{H}$).

8.1. ЛЕММА. *Для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ секстика $\mathcal{C}_{\vec{a}} \subset \mathbb{H}$ (п. 7.4) имеет особенность порядка 3 в точках $\{O_1, O_2, O_3\}$, и ее точное отображение $\varphi: \widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}$, раздутие $\{O_1, O_2, O_3\}$, является связным дивизором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $P(\alpha, \beta, \gamma)$ многочлен $(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(e_0 - \beta)^2 \times (e_0 - \gamma)^2$. Тогда для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ секстика $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ определена множеством нулей следующего однородного многочлена:

$$F_{\vec{a}} = (2a_0 + 1)^2 \prod_{j=1}^3 (e_0 - e_j)^2 - \sum_{i=1}^3 (2a_i + 1)^2 P(e_i, e_k, e_\ell) \quad (\{i, k, \ell\} = \{1, 2, 3\}). \quad (28)$$

Заменяя e_1, e_2 и e_3 величинами $x := \frac{e_1}{e_0}, y := \frac{e_2}{e_0}$ и $-(x + y) := \frac{e_3}{e_0}$ соответственно, мы получаем многочлен, определяющий аффинную секстику $\mathcal{C}_{\vec{a}} \cap \{e_0 \neq 0\}$. Непосредственное вычисление показывает, что $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ имеет особенности порядка 3 в $\{O_1, O_2, O_3\}$. При этом соответствующие касательные конусы определяются следующими уравнениями ($\alpha_j := 2a_j + 1, j = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} &\text{касательный конус в } O_3 = (1, 1): \\ &\{[x - y][\alpha_2 x - \alpha_1 y + \alpha_1 - \alpha_2][\alpha_2 x + \alpha_1 y - \alpha_1 - \alpha_2] = 0\}; \\ &\text{касательный конус в } O_2 = (1, -2): \\ &\{[2x + y][(\alpha_1 - \alpha_3)x + \alpha_1, y + \alpha_1 + \alpha_3][(\alpha_1 + \alpha_3)x + \alpha_1, y + \alpha_1 - \alpha_3] = 0\}; \\ &\text{касательный конус в } O_1 = (-2, 1): \\ &\{[x + 2y][\alpha_2 x + (\alpha_2 + \alpha_3)y + \alpha_2 - \alpha_3][\alpha_2 x + (\alpha_2 - \alpha_3)y + \alpha_2 + \alpha_3] = 0\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Предположим, что $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ раскладывается как $\mathcal{C}_{\vec{a}} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$, и обозначим через m'_1, m'_2 и m'_3 порядки $\mathcal{C}'$ в O_1, O_2 и O_3 соответственно. Известно, что $6 = \deg \mathcal{C}_{\vec{a}} = \deg \mathcal{C}' + \deg \mathcal{C}''$. Следовательно, $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ пересекаются с кратностью $5 = 5 \cdot 1, 8 = 4 \cdot 2$ или $9 = 3 \cdot 3$. С другой стороны, их точные отображения при действии $\varphi: \widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}$, обозначенные, как обычно, через $\widehat{\mathcal{C}}'$ и $\widehat{\mathcal{C}}''$, пересекаются с кратностью

$$\widehat{\mathcal{C}}' \cdot \widehat{\mathcal{C}}'' = \mathcal{C}' \cdot \mathcal{C}'' - m'_1(3 - m'_1) - m'_2(3 - m'_2) - m'_3(3 - m'_3),$$

которая, как это легко увидеть, не равна нулю, поскольку $0 \leq m'_i \leq 3$ и $m'_i(3 - m'_i) = 0$ или 2 ($i = 1, 2, 3$). Таким образом, $\widehat{\mathcal{C}}' \cap \widehat{\mathcal{C}}'' \neq \emptyset$.

8.2. ЛЕММА. *Выберем некоторые $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ и обозначим $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ и $\widehat{\mathcal{C}}_0$ соответственно точные отображения секстик $\mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ и $\mathcal{C}_{(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$ при раздутии $\varphi: \widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}$ точек $\{O_1, O_2, O_3\}$. Пусть E_j ($j = 1, 2, 3$) обозначает исключительную кривую $\varphi^*(O_j)$. Тогда $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ несвязно с $\widehat{\mathcal{C}}_0$ и линейно эквивалентно $\widehat{\mathcal{C}}_0 + E_1 + E_2 + E_3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из уравнений (29), касательные конусы секстик $\mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ и $\mathcal{C}_{(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$ в O_1, O_2 и O_3 трансверсальны и имеют порядки 3 и 4 соответственно. Следовательно, их точные отображения не пересекаются (поскольку $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)} \cdot \widehat{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)} \cdot \mathcal{C}_{(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})} - 3 \cdot (3 \cdot 4) = 36 - 36 = 0$) и

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)} &\equiv \varphi^*(\mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}) - 3 \sum_{j=1}^3 E_j \\ &\equiv \varphi^*(\mathcal{C}_{(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}) - 3 \sum_{j=1}^3 E_j \equiv \widehat{\mathcal{C}}_0 + \sum_{j=1}^3 E_j. \end{aligned}$$

8.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ дивизоры $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ и $\widehat{\mathcal{C}}_0 + \sum_{i=1}^3 E_i$ на $\widehat{\mathbb{H}}$ (см. п. 8.2) образуют пучок общих гладких неприводимых кривых рода 1. При этом, раздувая девять (возможно, инфинитезимальных) базисных точек этого пучка, получаем рациональное эллиптическое расслоение $(\widehat{\mathbb{H}} \leftarrow) \widehat{\widehat{\mathbb{H}}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ с характеристикой Эйлера–Пуанкаре $\chi(\widehat{\widehat{\mathbb{H}}}) = 15$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше было показано, что для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\vec{a} = (\lambda, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^3$ $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ – плоская секстика арифметического рода $1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 - 3) = 10$, имеющая особые точки порядка 3 в O_1, O_2 и O_3 . Следовательно, ее точное отображение $(\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}})$ в $\widehat{\mathbb{H}}$ имеет арифметический род 1 и является связным дивизором (п. 8.1). С другой стороны, поскольку $\mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ и $\mathcal{C}_{(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$ трансверсальны в O_1, O_2 и O_3 , легко проверяется, что $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ пересекает $\widehat{\mathcal{C}}_0 + E_1 + E_2 + E_3$ в гладких точках упомянутого дивизора. В частности, теорема Бертини утверждает, что общий элемент соответствующего пучка является гладким и связным (см. п. 8.1), а следовательно, также и неприводимым. ЕР-характеристика $\widehat{\mathbb{H}}$ равна $\chi(\widehat{\mathbb{H}}) = \chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) + 3 = 6$. Раздувая девять базисных точек пучка, мы в результате получаем рациональную эллиптическую поверхность, $\widehat{\widehat{\mathbb{H}}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, с ЕР-характеристикой $\chi(\widehat{\widehat{\mathbb{H}}}) = \chi(\widehat{\mathbb{H}}) + 9 = 15$. Например, если все a_j ($j = 1, 2, 3$) различны, то $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ трансверсально к $\widehat{\mathcal{C}}_0 + E_1 + E_2 + E_3$, и достаточно раздуть девять точек $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)} \cap (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$.

8.4. ЗАМЕЧАНИЕ. В соответствии с так называемой “формулой Лефшеца” [23; с. 509], ЕР-характеристика всех сингулярных слоев любого такого пучка (в $\widehat{\widehat{\mathbb{H}}}$) равна $\chi(\widehat{\widehat{\mathbb{H}}}) = 15$. Знание нескольких приводимых слоев (а также легко оцениваемой их ЕР-характеристики) позволяет, в результате, выделить гладкие и неприводимые слои (пп. 8.5 и 8.6).

8.5. ЛЕММА. Для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ такого, что $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, секстика $\mathcal{C}_{\vec{a}} = \{F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2) = 0\}$ (см. (29)) содержит неприводимую конику, проходящую через O_1, O_2 и O_3 , и $\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}$ – его точное отображение в $\widehat{\widehat{\mathbb{H}}}$, имеет ЕР-характеристику не меньшую, чем $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}) \geq 2$. Более

точно, обозначая $2a_i + 1$ через α_i ($i = 0, \dots, 3$), можно легко проверить, что:

I) если $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, то $F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2)$ кратно

$$R_{\vec{a}}^{++++} := \alpha_2 e_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) e_1 e_2 + \alpha_1 e_2^2 \\ + (\alpha_3 - \alpha_1) e_0 e_1 + (\alpha_3 - \alpha_2) e_0 e_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) e_0^2;$$

II) если $\alpha_0 = |-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3|$, то $F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2)$ кратно

$$R_{\vec{a}}^{-++} := \alpha_2 e_1^2 + (\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1) e_1 e_2 - \alpha_1 e_2^2 \\ + (\alpha_1 + \alpha_3) e_1 e_0 + (\alpha_3 - \alpha_2) e_0 e_2 - (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) e_0^2;$$

III) если $\alpha_0 = |\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3|$, то $F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2)$ кратно

$$R_{\vec{a}}^{+-+} := \alpha_2 e_1^2 + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) e_1 e_2 - \alpha_1 e_2^2 \\ + (\alpha_1 - \alpha_3) e_1 e_0 - (\alpha_2 + \alpha_3) e_0 e_2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) e_0^2;$$

IV) если $\alpha_0 = |\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3|$, то $F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2)$ кратно

$$R_{\vec{a}}^{+--} := \alpha_2 e_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) e_1 e_2 + \alpha_1 e_2^2 \\ - (\alpha_1 + \alpha_3) e_1 e_0 - (\alpha_2 + \alpha_3) e_0 e_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) e_0^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая коника $\{R = 0\} \subset \mathbb{H}$ ($R = R_{\vec{a}}^{++++}, R_{\vec{a}}^{+--}, R_{\vec{a}}^{-++}$ или $R_{\vec{a}}^{+-+}$) является гладкой касательной к $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ в O_1, O_2 и O_3 . В частности, сумма кратностей пересечения между $\{R = 0\} \cap \mathcal{C}_{\vec{a}}$ в $\{O_1, O_2, O_3\}$ составляет не менее 12. Но $\{R = 0\} \cdot \mathcal{C}_{\vec{a}} = 2 \cdot 6 = 12$. Следовательно, $\{R = 0\} \cap \mathcal{C}_{\vec{a}}$ равно $\{O_1, O_2, O_3\}$, если $\{R = 0\} \subset \mathcal{C}_{\vec{a}}$. С другой стороны, можно легко проверить, что в каждом из перечисленных выше случаев I)–IV) $R(0, e_1, e_2)$ делит $F_{\vec{a}}(0, e_1, e_2)$. Другими словами, $\{R = 0\} \cap \mathcal{C}_{\vec{a}} \cap \{e_0 = 0\} \neq \emptyset$. Следовательно, $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ содержит конус $\{R = 0\}$. Пусть $\mathcal{C}_{\vec{a}} = \{R = 0\} \cup \{T = 0\}$ – соответствующее разложение. После раздутия (O_1, O_2 и O_3) точные отображения $\{R = 0\}$ и $\{T = 0\}$ продолжают пересекаться с кратностью 2. Отсюда следует, что ЕР-характеристика $\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}$ уже ≥ 2 и может только возрасти после второй серии раздутий. Таким образом, мы доказали, что $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}) \geq 2$.

8.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ обозначим через $\widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ рациональные эллиптические расслоения, построенные в п. 8.3, и через $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ – точное отображение $\mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ в $\widehat{\mathbb{H}}$. Тогда это расслоение имеет $t := 2 + \#\{a_1, a_2, a_3\}$ приводимых слоев, с ЕР-характеристикой, доходящей до 14, и $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ в качестве единственного неприводимого слоя с узлом. Все остальные слои являются гладкими и неприводимыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше было показано, что ЕР-характеристика всех сингулярных слоев $\widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ дорастает до $\chi(\widehat{\mathbb{H}}) = 15$, и простое вычисление показывает, что секстика $\mathcal{C}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ (см. п. 8.2) имеет узел при $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{H}$. В частности, ее точное отображение, $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$, является либо неприводимой рациональной кривой с узлом (и $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}) = 1$), либо редуцируемой кривой (и $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}) \geq 2$). Кроме того, редуцируемый слой, соответствующий секстике

$$\mathcal{C}_{(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})} = \left\{ \prod_{j=1}^3 (e_0 - e_j)^2 = 0 \right\} \quad \left(\sum_{j=1}^3 e_j = 0 \right),$$

изоморфен $\widehat{\mathcal{C}}_0 + E_1 + E_2 + E_3$ (см. п. 8.2) и его ЕР-характеристика равна 6. С другой стороны, можно легко проверить, что $(m - 1 = 1 + \#\{a_1, a_2, a_3\})$ редуцируемых слоев, полученных в п. 8.5, имеют ЕР-характеристику, равную (по крайней мере) 8. Возникают три случая, подлежащие рассмотрению.

$\#\{a_1, a_2, a_3\} = 3$. Существуют четыре различные значения a_0 такие, что множество $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно зависимо над $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$. Следовательно, существуют четыре приводимых слоя $\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}$ с $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}) \geq 2$ (п. 8.5).

$\#\{a_1, a_2, a_3\} = 2$. Существует пара $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ($a \neq b$) такая, что, с точностью до упорядочения, $(a_1, a_2, a_3) = (a, a, b)$, и только три значения a_0 такие, что $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно зависимо над $\mathbb{Z}^*$. А именно, $2a_0 + 1 = 2b + 1$, $4a + 3 + 2b$ или $|4a + 1 - 2b|$. В первом случае ($a_0 = b$) соответствующая редуцируемая секстика $\mathcal{C}_{\vec{a}} = \{F_{\vec{a}} = 0\}$ является объединением трех неприводимых коник, проходящих через O_1, O_2 и O_3 . Из п. 8.5, I) и II), следует, что $F_{\vec{a}}$ факторизуется как $F_{\vec{a}} = F_{(b, a, a, b)} = R_{\vec{a}}^{-++} \cdot R_{\vec{a}}^{+-+} \cdot R$ для некоторого неприводимого многочлена $R := R_{(b, a, a, b)}$ (который может быть легко выписан). Следовательно,

$$\mathcal{C}_{\vec{a}} = \{R_{\vec{a}}^{-++} = 0\} \cup \{R_{\vec{a}}^{+-+} = 0\} \cup \mathcal{C}on_{\vec{a}},$$

где

$$\mathcal{C}on_{\vec{a}} := \{R_{(b, a, a, b)} = 0\}.$$

Кроме того, последние коники трансверсальны в O_1 и O_2 , но $\mathcal{C}_{\vec{a}}^{-++} := \{R_{\vec{a}}^{-++} = 0\}$ касается с $\mathcal{C}_{\vec{a}}^{+-+} := \{R_{\vec{a}}^{+-+} = 0\}$ и трансверсальна к $\mathcal{C}on_{\vec{a}}$ в O_3 (см. (29) при $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$). Поэтому точное отображение $\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}$ в $\widehat{\mathbb{H}}$ равно

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}} = \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{-++} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{+-+} \cup \widehat{\mathcal{C}on}_{\vec{a}},$$

и $\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{-++} \cdot \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{+-+} = 0$ (но $\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{-++} \cdot \widehat{\mathcal{C}on}_{\vec{a}} = \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{+-+} \cdot \widehat{\mathcal{C}on}_{\vec{a}} = 1$). В частности, $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}) = 4$. Таким образом, мы получаем три редуцируемые слоя (п. 8.5) с ЕР-характеристикой, равной (по крайней мере) $4 + 2 + 2 = 8$.

$\#\{a_1, a_2, a_3\} = 1$. Поскольку $a_1 = a_2 = a_3$, лемма п. 8.5 приводит только к двум значениям a_0 таким, что $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно зависимо над $\mathbb{Z}^*$. А именно, $a_0 = a_1$ и $a_0 = 3a_1$. Для $a_0 = a_1 = a_2 = a_3$ $F_{\vec{a}}$ факторизуется как произведение

трех неприводимых квадратичных многочленов: $\{R_a^{++-}, R_a^{+-+}, R_a^{-++}\}$. Другими словами,

$$F_{(a_0, a_0, a_0, a_0)} = (2a_0 + 1)^2 [e_1^2 + 3e_1e_2 + e_2^2 - 2e_0e_1 - 2e_0e_2 - e_0^2] \\ \times [e_1^2 + e_1e_2 - e_2^2 - 2e_0e_2 + e_0^2] [e_1^2 - e_1e_2 - e_2^2 + 2e_1e_0 - e_0^2].$$

Следовательно,

$$\mathcal{C}_a = \{R_a^{++-} = 0\} \cup \{R_a^{+-+} = 0\} \cup \{R_a^{-++} = 0\},$$

и соответствующее точное отображение в $\widehat{\mathbb{H}}$ образовано тремя несвязными экземплярами $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ и имеет ЕР-характеристику, равную 6. Таким образом, мы получили два редуцируемых слоя (п. 8.5) с ЕР-характеристикой, равной (по крайней мере) $6 + 2 = 8$.

Суммируя все наши аргументы, заключаем, что поскольку $\chi(\widehat{\mathbb{H}}) = 15$, то $1 + \#\{a_1, a_2, a_3\}$ редуцируемых слоев, полученных в п. 8.5, имеют минимально возможную ЕР-характеристику (т.е. $(2, 2, 2, 2)$, $(4, 2, 2)$ и $(6, 2)$), в то время как $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_0) = 6$. Следовательно, $\chi(\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}) = \chi(\widehat{\mathbb{H}}) - 8 - 6 = 1$ (т.е. $\widehat{\mathcal{C}}_{(-\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3)}$ – рациональная неприводимая кривая, имеющая узел при $(1 : 0 : 0)$) и все остальные слои являются гладкими. Другими словами, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ слой $\widehat{\mathcal{C}}_{(\lambda, a_1, a_2, a_3)}$ – эллиптическая кривая, если и только если

$$(2\lambda + 1)^2 \notin \{0, (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2, (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2, (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)^2, (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)^2\}.$$

9. Полное описание нового класса четных эллиптических конечно-зонных потенциалов

9.1. Предложение п. 8.6 и его доказательство основано на подробном изучении подмножества редуцируемых секстик $\{\mathcal{C}_{\vec{a}}, \vec{a} \in \mathbb{N}^4\}$ и позволяет перейти к заключительному этапу описания связи между $\mathcal{R}(n, \mu)$ ($\mu^{(2)} = 2n - 3$) и $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ при любых $\vec{a} \in \{A^k(\mu), B^k(\mu), k = 0, \dots, 3\}$ (п. 9.6). Мы используем эту связь для получения полного описания всех четных эллиптических конечно-зонных потенциалов вида (6), где $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{N}^4$ и $2\rho \neq 0$ (пп. 9.7, 9.9). Напомним, что подмножество всех возможных типов, $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}^4$, раскладывается в несвязное объединение $\mathbb{M} = \coprod_{j=0}^3 \mathbb{M}^{\#j}$, где μ принадлежит $\mathbb{M}^{\#j}$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \mathbb{M}$ и $\#\{i, \mu_i = 0\} = j$. При этом для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ существует единственный тип $\mu \in \mathbb{M}$ такой, что $\vec{a} \in \{A^k(\mu), B^k(\mu), k = 0, \dots, 3\}$ [41; §§ 4.4, 4.5, 5.3]. Обозначим через n натуральное число

$$n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3) = 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)$$

и через $F_{\vec{a}}$ – однородный многочлен (28) такой, что $\mathcal{C}_{\vec{a}} = \{F_{\vec{a}} = 0\} \cap \mathbb{H}$. Исчерпывающее изучение всех возможностей приводит к рассмотрению четырех различных случаев.

9.2. ТЕОРЕМА (случай $\mu \in \mathbb{M}^{\#0}$). *Следующие свойства эквивалентны:*

- i) $\mu \in \mathbb{M}^{\#0}$ (т.е. $\mu_i \neq 0$ для всех $i = 0, \dots, 3$);

- ii) множество целых чисел $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно независимо над $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$;
- iii) инъективное отображение $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ (см. п. 7.7) является изоморфизмом;
- iv) для любой эллиптической кривой X и любого $\rho \in X \setminus \{\omega_i\}$ четная функция (6) является одним из эллиптических конечно-зонных потенциалов, канонически ассоциированных с некоторым $\pi \in R(n, \mu, X)$ (см. п. 6.3), если и только если выполняется (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность i) $\Leftrightarrow$ ii) может быть непосредственно проверена с помощью формул для A^k и B^k ($k = 0, \dots, 3$) (см., например, п. 6.3 или [41; §§ 4.4, 5.4.3]). Из п. 8.6 следует, что $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ является гладким и неприводимым, если и только если $\{2a_i + 1\}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}^*$. Напомним, что, с другой стороны, образ $\mathcal{R}(n, \mu)$ при инъективном морфизме $\mathcal{A}^k$ или $\mathcal{B}^k$ образует замкнутое подмногообразие в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ (п. 7.7) и что степень $(\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}) < 6$, если $\mu \notin \mathbb{M}^{\#0}$ (п. 4.12). Поэтому из пп. 9.2.i) и 9.2.ii) следует, что собственное инъективное отображение $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ должно быть также сюръективным и, следовательно, изоморфизмом, поскольку $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ является гладким вне $\{O_1, O_2, O_3\}$. Наконец, из п. 9.2.iii) с очевидностью следует утверждение п. 9.2.iv), которое, в свою очередь, означает, что $\deg(\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}) = 6$. Следовательно, $\mu \in \mathbb{M}^{\#0}$.

9.3. ТЕОРЕМА (случай $\mu \in \mathbb{M}^{\#1}$). Следующие свойства эквивалентны:

- i) $\mu \in \mathbb{M}^{\#1}$ (т.е. $\#\{i, \mu_i = 0\} = 1$);
- ii) множество чисел $\{2a_i + 1, i = 0, \dots, 3\}$ линейно зависимо над $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, но $\vec{a} \notin \{(c, c, d, d), (c, d, c, d), (c, d, d, c); c, d \in \mathbb{N}\}$;
- iii) однородный многочлен $F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2)$ (см. (28)) факторизуется как $F_{\vec{a}} = T \cdot R$, где $R \in \{R_{\vec{a}}^{+++}, R_{\vec{a}}^{-++}, R_{\vec{a}}^{+-+}, R_{\vec{a}}^{++-}\}$ (см. п. 8.5). Кроме того, плоская кватрика $\mathcal{Q}_{\vec{a}} := \{T = 0\}$, являющаяся неприводимой компонентой $\mathcal{C}_{\vec{a}}$, а также образом инъективного отображения $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$, определяет изоморфизм между $\mathcal{R}(n, \mu)$ и $\mathcal{Q}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$;
- iv) $F_{\vec{a}}$ факторизуется так же, как и в п. 9.3.iii), и для любой эллиптической кривой X и любого $\rho \in X$ ($2\rho \neq 0$) функция (6) – один из эллиптических конечно-зонных потенциалов, канонически ассоциированных с некоторым $\pi \in R(n, \mu, X)$ (см. п. 6.3) тогда и только тогда, когда $T(\wp(\rho), e_1, e_2) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность свойств i) и ii) следует непосредственно из соответствующих формул (п. 6.3) и подразумевает, что $F_{\vec{a}}$ факторизуется как в п. 9.3.iii) (см. п. 8.5). Например, если $2a_0 + 1 = \sum_{j=1}^3 (2a_j + 1)$, то $R_{\vec{a}}^{+++}$ делит $F_{\vec{a}}$, $F_{\vec{a}} = R_{\vec{a}}^{+++} T$, и кватрика $\mathcal{Q}_{\vec{a}} = \{T = 0\}$ неприводима, поскольку

$$\vec{a} \notin \{(c, c, d, d), (c, d, d, c), (c, d, c, d); c, d \in \mathbb{N}\}$$

(см. п. 8.6). В частности, собственный морфизм (п. 7.7) $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ должен накрывать либо аффинную конику $\{R = 0\} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$, либо аффинную кватрику $\mathcal{Q}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$. Как показано в п. 4.12, для произвольного $X \in \mathfrak{X}$ $\#R(n, \mu, X) \geq 2$. Следовательно, $\deg(\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}) \geq 2$, причем равенство имеет место, если и только если проекция $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$ не разветвлена. С другой стороны, можно легко проверить (используя формулу Гурвица и локальное разложение

$R(e_0, e_1, e_2)$ в окрестности $\{O_1, O_2, O_3\}$), что проекция $\{R = 0\} \setminus \{O_1, O_2, O_3\} \rightarrow \mathfrak{X}$ действительно является разветвленной. Следовательно, $\deg(\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}) > 2$ и $\mathcal{R}(n, \mu)$ покрывает аффинную кваттику $\mathcal{Q}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$. Наконец, поскольку $\mathcal{Q}_{\vec{a}}$ является гладким вне $\{O_1, O_2, O_3\}$, упомянутое инъективное отображение определяет изоморфизм между $\mathcal{R}(n, \mu)$ и $\mathcal{Q}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$. Свойство п. 9.3.iii) очевидно, приводит к п. 9.3.iv), что, в свою очередь, означает, что $F_{\vec{a}}$ факторизуется и $\deg(\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}) = 4$. Следовательно, $\#\{i, \mu_i = 0\} = 1$ (т.е. $\mu \in \mathbb{M}^{\#1}$).

9.4. ТЕОРЕМА (случай $\mu \in \mathbb{M}^{\#2}$). *Следующие свойства эквивалентны:*

- i) $\mu \in \mathbb{M}^{\#2}$;
- ii) существуют $c, d \in \mathbb{N}$, $c \neq d$, такие, что $\vec{a}$ равен либо (c, c, d, d) , либо (c, d, c, d) , либо (c, d, d, c) ;
- iii) $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ распадается на объединение трех неприводимых аффинных коник, и $\mathcal{R}(n, \mu)$ изоморфно отображается на одну из них (обозначенную в п. 8.6 через $\text{Cоп}_{\vec{a}}$). Кроме того, пусть $\vec{a}$ такой, как в п. 9.4.ii). Тогда для произвольной эллиптической кривой X и произвольного $\rho \in X$ функция (6) является одним из четных эллиптических конечно-зонных потенциалов, канонически ассоциированных с некоторым $\pi \in R(n, \mu, X)$ (см. п. 6.3), тогда и только тогда, когда 2ρ равно ω_1 (при $\vec{a} = (c, c, d, d)$), ω_2 (при $\vec{a} = (c, d, c, d)$) или ω_3 (при $\vec{a} = (c, d, d, c)$). В частности, $u(x)$ – непримитивный потенциал (п. 1.13.2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства пп. 9.4.i) и 9.4.ii), как легко видеть, эквивалентны и позволяют заключить, что $R(n, \mu, X) \neq \emptyset$ для некоторого $X \in \mathfrak{X}$. Из них также следует, что $\deg(\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}) \leq 2$ (п. 4.12) и что $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ расщепляется как сумма трех гладких коник (п. 8.6). Следовательно, инъективное отображение $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ определяет изоморфизм $\mathcal{R}(n, \mu)$ с одной из неприводимых компонент $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$. Обратно, расщепление $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ на сумму коник при $\mathcal{R}(n, \mu) \neq \emptyset$ подразумевает, что $\mu \in \mathbb{M}^{\#2} \cup \mathbb{M}^{\#3}$, но $\mu \notin \mathbb{M}^{\#3}$. Следовательно, $\mu \in \mathbb{M}^{\#2}$. Наконец, докажем, что $R(n, \mu, X) \neq \emptyset$ для любого $X \in \mathfrak{X}$, если $\mu \in \mathbb{M}^{\#2}$ (т.е. если μ равно либо $(2\ell + 1, 2k, 0, 0)$, либо $(2\ell + 1, 0, 2k, 0)$, либо $(2\ell + 1, 0, 0, 2k)$ при некотором $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$). Предположим, например, что $\mu = (2\ell + 1, 2k, 0, 0)$, следовательно, $n = 2(\ell^2 + \ell + k^2 + 1)$, и рассмотрим проекцию $r: X \rightarrow Y := X/\langle \omega_0, \omega_1 \rangle$. Выберем $\rho \in X$ такое, что $2\rho = \omega_1$. Можно легко проверить, что

$$\nu_0 := r(\omega_0) = r(\omega_1), \quad \nu_1 := r(\omega_2) = r(\omega_3), \quad \nu_2 := r(\rho), \quad \nu_3 := r(\rho + \omega_2) = \nu_2 + \nu_1$$

являются полупериодами Y . При этом дуальный морфизм $\hat{r}: Y \rightarrow X$ имеет ядро $\ker \hat{r} = \langle \nu_0, \nu_1 \rangle$. Рассмотрим исключительные накрытия $\pi': \Gamma' \rightarrow Y$ и $\pi'': \Gamma'' \rightarrow Y$, типов

$$\mu' = (\ell + 1, \ell, k - 1, k + 1) \quad \text{и} \quad \mu'' = (\ell + 1, \ell, k + 1, k - 1)$$

соответственно, если $\ell \equiv k - 1 \pmod{2}$; в противном случае выберем

$$\mu' = (\ell, \ell + 1, k - 1, k + 1) \quad \text{и} \quad \mu'' = (\ell, \ell + 1, k + 1, k - 1).$$

Они имеют одинаковые степень, $\ell^2 + \ell + k^2 + 1 = \frac{n}{2}$, и арифметический род $\frac{1}{2}((\mu')^{(1)} - 1) = \ell + k = \frac{1}{2}((\mu'')^{(1)} - 1)$. Композиция π' и π'' с $\widehat{r}: Y \rightarrow X$ приводит к двум гиперэллиптическим касательным накрытиям степени n над X , типа $\mu = (2\ell + 1, 2k, 0, 0)$ и арифметического рода $\ell + k = \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1)$. Следовательно, $R(n, \mu, X)$ содержит $\{\widehat{r} \circ \pi', \widehat{r} \circ \pi''\}$. Кроме того, композиция проектирования $r: X \rightarrow Y$ с каноническими эллиптическими конечно-зонными потенциалами, ассоциированными с π' и π'' , приводит к потенциалам, ассоциированным с $\widehat{r} \circ \pi'$ и $\widehat{r} \circ \pi''$ соответственно. Можно проверить, в частности (упражнение!), что пара непримитивных функций,

$$u(x) = 2f(x - \tau) + c(c + 1)f(x) + d(d + 1)f(x - \omega_2) \\ (\text{где } 2\tau = \omega_1 \text{ и } f(x) \equiv \wp(x) + \wp(x - \omega_1)),$$

может быть получена именно таким образом. Наконец, хотя это и не утверждалось в п. 9.4, отметим, что для любого $X \in \mathfrak{X}$ $R(n, \mu, X)$ не только содержит, но и равно $\{\widehat{r} \circ \pi', \widehat{r} \circ \pi''\}$. Это следует из того, что $\#R(n, \mu, X) \leq 2$ (п. 4.12.2)) и что $\widehat{r} \circ \pi'$ неизоморфно $\widehat{r} \circ \pi''$ (см. п. 4.12).

9.5. ТЕОРЕМА (случай $\mu \in \mathbb{M}^{\#3}$). *Следующие свойства эквивалентны:*

- i) $\mu \in \mathbb{M}^{\#3} = \{(2k + 1, 0, 0, 0), k \in \mathbb{N}\}$;
- ii) $\vec{a} \in \{(b, b, b, b), b \in \mathbb{N}\}$;
- iii) $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ расщепляется на сумму трех коник и $\mathcal{R}(n, \mu) = \emptyset$.

В последнем случае

$$\sum_{i=0}^3 (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0$$

эквивалентно равенству $4\rho = 0$ при $2\rho \neq 0$. Для любого решения ρ четная функция

$$u(x) = 2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + b(b + 1) \sum_{i=0}^3 \wp(x - \omega_i)$$

является непримитивным эллиптическим конечно-зонным потенциалом, ассоциированным с исключительным накрытием степени $n := 2(b^2 + b + 1)$ и типа, равного либо $(2k + 1, 2, 0, 0)$, либо $(2k + 1, 0, 2, 0)$, либо $(2k + 1, 0, 0, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность следует (снова) из ш. 4.12 и 8.6, в то время как последнее утверждение было доказано в п. 6.6.

Мы достигаем главную цель нашей работы в нижеследующих трех следствиях. Первое резюмирует глобальные свойства пространств модулей $\{\mathcal{R}(n, \mu), \mu \in \mathbb{M}, \mu^{(2)} = 2n - 3\}$ (ср., например, с п. 9.2, [37; §6.7] и [38; §2.1]) и их плоских моделей $\{\mathcal{C}_{\vec{a}}, \vec{a} \in \mathbb{N}^4\}$. Два других содержат анонсированное полное описание (ср. с [41; §3.2]). Все они следуют, более или менее непосредственно, из ш. 9.2–9.5.

9.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ и $\mu \in \mathbb{M}$ таковы, что $\vec{a}$ принадлежит множеству $\{A^k(\mu), B^k(\mu), k = 0, \dots, 3\}$. Обозначим через n (соответственно j_0) числа $n := 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1) = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3)$ (соответственно $j_0 := \#\{i, \mu_i = 0\}$). Тогда

- 1) $\mathcal{R}(n, \mu)$ является гладким и неприводимым (однако пустым, если $j_0 = 3$, т.е. если $\mu \in \mathbb{M}^{\#3}$);

- 2) естественная проекция $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$ имеет степень $6 - 2j_0$ и факторизуется при вложении $\mathcal{R}(n, \mu)$ в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$;
- 3) проекция $\mathcal{C}_{\vec{a}} \rightarrow \{e_0 = 0\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (см. доказательство предложения в п. 7.7) обеспечивает естественную компактификацию $\mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathfrak{X}$;
- 4) дополнение образа $\mathcal{R}(n, \mu)$ в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$ также параметризует четные эллиптические конечно-зонные потенциалы, однако ассоциированные с “неканоническими” θ -характеристиками над исключительными накрытиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно привести доказательство п. 9.6.4). При $\mu \in \mathbb{M}^{\#0}$ или $\mu \in \mathbb{M}^{\#3}$ утверждение тривиально (см. пп. 9.2 и 9.5). Рассмотрим произвольное $\mu \in \mathbb{M}^{\#1}$, для которого известно, что (в общем случае над $\mathfrak{X}$) $\#R(n, \mu, X) = 4$. Выберем, например, $\mu = (0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ (следовательно, $\mu_0 = 0$ и $n = \frac{1}{2}(3 + \sum_{j=1}^3 \mu_j^2)$) и обозначим через $\hat{\pi}: (\hat{\Gamma}, \hat{p}) \rightarrow (X, q)$ исключительное накрытие типа $\hat{\mu} := (2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, арифметического рода $\hat{g} := \frac{1}{2}(\hat{\mu}^{(1)} - 1) = \frac{1}{2}(\mu^{(1)} - 1) + 1$ и степени $\frac{1}{2}(\hat{\mu}^{(2)} - 1) = \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3) = n$. Пересечение в $S^\perp$ между $r_0^\perp$ и вложением $\hat{\Gamma}$ в $S^\perp$ (п. 2.2) имеет степень, равную $\hat{\mu}_0 = 2$. Следовательно, $r_0^\perp$ “пересекает” $\hat{\Gamma}$ по двум точкам Вейерштрасса, обозначенным через $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$. Кроме того, непосредственное применение формулы Фэя–Сигала–Вильсона, такое же как и в пп. 5.3 и 6.3, показывает, что эллиптические конечно-зонные потенциалы, ассоциированные с $\theta_{\hat{\Gamma}}((\hat{g} - 2)\hat{p} + \hat{p}_\ell)$ и с $\theta_{\hat{\Gamma}}((n + \hat{g} - 2)\hat{p} + \hat{p}_\ell - \hat{\pi}^*(q))$ ($\ell = 1, 2$), и их сдвиги $\{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ имеют такой же тип (п. 9.1). Таким образом, мы получаем два пропущенных эллиптических конечно-зонных потенциала. Аналогичная конструкция может быть осуществлена и для произвольного $\mu \in \mathbb{M}^{\#2}$ (см. п. 9.9 и приведенное там доказательство).

9.7. СЛЕДСТВИЕ. Для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$, произвольной эллиптической кривой $X \in \mathfrak{X}$ и произвольной точки $\rho \in X \setminus \{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$ четная функция (6) является эллиптическим конечно-зонным потенциалом тогда и только тогда, когда выполняется (7).

9.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Для того чтобы получить полную картину, следует дополнить п. 9.7 “вычислением” спектральных данных, характеризующих каждый из описываемых формулой (6) эллиптический конечно-зонный потенциал (по крайней мере род соответствующей спектральной кривой).

Напомним, что для каждого вектора $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ существует единственный тип $\mu = \mu(\vec{a}) \in \mathbb{M}$ такой, что $\vec{a} \in \{A^k(\mu), B^k(\mu), k = 0, \dots, 3\}$ (см., например, [41; §4.4, §4.5, §5.3]). Мы также показали (см., например, пп. 7.7, 9.2.iii), 9.3.iii), 9.4.iii)), что, выбирая подходящую каноническую θ -характеристику (например $\xi_{A,0}$, если $\vec{a} = A^\circ(\mu)$) для произвольного элемента из пространства модулей $\mathcal{R}(n, \mu)$ ($n := \frac{1}{2}(\mu^{(2)} + 3) = 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1)$), мы получаем собственное вложение

$$\mathcal{R}(n, \mu) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}.$$

Как следует из пп. 9.2–9.5, упомянутое “вычисление” позволяет охарактеризовать естественный образ $\mathcal{R}(n, \mu)$ в $\mathcal{C}_{\vec{a}}$. Последний является неприводимой компонентой, равной целой секстике (если $\mu \in \mathbb{M}^{\#0}$), кватерике $\mathcal{Q}_{\vec{a}}$ (если $\mu \in \mathbb{M}^{\#1}$), конике $\mathcal{C}on_{\vec{a}}$

(если $\mu \in \mathbb{M}^{\#2}$) или пустому множеству (если $\mu \in \mathbb{M}^{\#3}$). Соответствующие однородные многочлены (в случае $\mu \in \mathbb{M}^{\#1} \cup \mathbb{M}^{\#2}$) могут быть явно найдены с помощью MAPLE-user Fatma Jeeawock. Мы считаем, однако, более целесообразным представить более простое описание, основанное на вычислении вектора $\mu(\vec{a})$, а также определяющих многочленов $\mathcal{Q}_{\vec{a}}$ или $\mathcal{C}on_{\vec{a}}$.

9.9. СЛЕДСТВИЕ. Для любого $\vec{a} \in \mathbb{N}^4$ обозначим через $\Pi_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2)$ произведение

$$\Pi_{\vec{a}} = R_{\vec{a}}^{++++} \cdot R_{\vec{a}}^{-++-} \cdot R_{\vec{a}}^{+-+-} \cdot R_{\vec{a}}^{++--} \quad (30)$$

(см. п. 8.5), через $\mu(\vec{a}) \in \mathbb{M}$ – единственный тип такой, что

$$\vec{a} \in \{A^k(\mu(\vec{a})), B^k(\mu(\vec{a})), k = 0, \dots, 3\},$$

и через n – число

$$n := 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i(a_i + 1) = \frac{1}{2}(\mu(\vec{a})^{(2)} + 3).$$

Тогда для любой эллиптической кривой $X \in \mathfrak{X}$ решения уравнения (7) ($2\rho \neq 0$) порождают два различных типа эллиптических конечно-зонных потенциалов (п. 9.7):

I) Если

$$\sum_{i=0}^3 (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0,$$

но $\Pi_{\vec{a}}(\wp(\rho), e_1, e_2) \neq 0$, то эллиптический конечно-зонный потенциал $u(x)$ (6) ассоциированный с $(\Gamma, p, \lambda_\pi, \xi)$, где $\pi \in R(n, \mu(\vec{a}), X)$ и ξ – одна из канонических θ -характеристик ($\xi = \xi_{A,0}$, если $\vec{a} = A^\circ(\mu(\vec{a}))$, и т. д.). В частности, арифметический род спектральной кривой Γ равен

$$g := \frac{1}{2}(\mu(\vec{a})^{(1)} - 1) = \frac{1}{2} \max \left\{ 2M, 1 + \Sigma - (1 + (-1)^\Sigma) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

где

$$M = \max\{a_i\}, \quad \Sigma = \sum_{i=0}^3 a_i \quad \text{и} \quad m = \min\{a_i\}.$$

II) Если

$$\sum_{i=0}^3 (2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0 \quad \text{и} \quad \Pi_{\vec{a}}(\wp(\rho), e_1, e_2) = 0,$$

то существуют $k \in \{0, \dots, 3\}$, исключительное накрытие $\hat{\pi}: (\hat{\Gamma}, \hat{p}) \rightarrow (X, q)$ степени n и типа $\hat{\mu}$ (где $\hat{\mu}_i = \mu(\vec{a})_i + 2\delta_{ik}$, $i = 0, \dots, 3$) и точка Вейерштрасса $\hat{p}' \in \hat{\Gamma}$ над ω_k такие, что эллиптический конечно-зонный потенциал $u(x)$ (6) ассоциирован с $(\hat{\Gamma}, \hat{p}, \lambda_{\hat{\pi}}, \xi)$, где $\xi \otimes \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}}(\hat{p} - \hat{p}')$ – одна из канонических θ -характеристик (например, $\xi = \xi_{A,0} \otimes \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}}(\hat{p}' - \hat{p})$, если

$\vec{a} = A^\circ(\mu(\vec{a}))$). В частности, арифметический род спектральной кривой $\widehat{\Gamma}$ равен

$$\widehat{g} := \frac{1}{2}(\widehat{\mu}^{(1)} - 1) = g + 1 = 1 + \frac{1}{2} \max \left\{ 2M, 1 + \Sigma - (1 + (-1)^\Sigma) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Другими словами, функция (6) является порождающим потенциалом (п. 5.7) тогда и только тогда, когда выполняется (7),

$$\Pi_{\vec{a}}(\wp(\rho), e_1, e_2) \neq 0, \quad a_0 = M \quad \text{и} \quad 2M \geq \Sigma - (1 + (-1)^\Sigma)m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все, что еще остается доказать — это то, что обращение в нуль $\Pi_{\vec{a}}$ различает образ $\mathcal{R}(n, \mu(\vec{a}))$ и его дополнение в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$. Ранее показано, что пересечение $(\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \{O_1, O_2, O_3\}) \cap \{\Pi_{\vec{a}} = 0\}$ содержит упомянутое дополнение (см. пп. 9.3.iii), 9.4.iii) и 9.5.iii)). С другой стороны, можно легко проверить, что для любых $R \in \{R_{\vec{a}}^{++++}, R_{\vec{a}}^{-++}, R_{\vec{a}}^{+-+}, R_{\vec{a}}^{++-}\}$ коника $\{R = 0\}$ пересекает секстику $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ в O_j ($j = 1, 2, 3$) с кратностью 4. Следовательно, $\{R = 0\}$ не пересекает ни одной неприводимой компоненты $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ (отличной от $\{R = 0\}$) вне $\{O_1, O_2, O_3\}$. Таким образом, мы показали, что $\{R = 0\}$, а следовательно, и $\{\Pi_{\vec{a}} = 0\}$ не пересекается с образом $\mathcal{R}(n, \mu(\vec{a}))$, как и требовалось.

Сделаем в заключение несколько замечаний относительно типа $\widehat{\mu}$ и объясним выбор “неканонических” θ -характеристик в случае п. 9.9.П). Напомним, что дополнение к образу $\mathcal{R}(n, \mu(\vec{a}))$ непусто тогда и только тогда, когда $\mu(\vec{a})$ принадлежит $\bigcup_{j=1}^3 \mathbb{M}^{\#j}$. Случаи $\mu(\vec{a}) \in \mathbb{M}^{\#1}$ и $\mu(\vec{a}) \in \mathbb{M}^{\#3}$ были уже изучены полностью (см. пп. 9.6.4) и 6.6). Предположим, наконец, что $\mu(\vec{a}) \in \mathbb{M}^{\#2}$. Предположим, для простоты, что $\mu(\vec{a}) := (2\ell + 1, 2k, 0, 0)$ ($k \neq 0$) и $A^\circ(\mu(\vec{a})) = \vec{a}$. Пусть $\widehat{\pi}: (\widehat{\Gamma}, \widehat{p}) \rightarrow (X, q)$ обозначает исключительное накрытие типа $\widehat{\mu} := (2\ell + 1, 2k, 2, 0)$ (соответственно $\widehat{\mu} := (2\ell + 1, 2k, 0, 2)$), степени $n := \frac{1}{2}(\widehat{\mu}^{(2)} + 1) = \frac{1}{2}(\mu(\vec{a})^{(2)} + 3)$ и арифметического рода $\widehat{g} := \frac{1}{2}(\mu(\vec{a})^{(1)} + 1)$, и пусть $\widehat{p}'$ обозначает одну из двух точек Вейерштрасса кривой $\widehat{\Gamma}$ над ω_2 (соответственно над ω_3). Непосредственное применение формулы для нижних границ (п. 5.4), как и в доказательстве теоремы в п. 6.3, приводит к заключению, что эллиптический конечно-зонный потенциал, ассоциированный с

$$\xi_{A,0} \otimes \theta_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{p}' - \widehat{p}) = \theta_{\widehat{\Gamma}}((\widehat{g} - 2)\widehat{p} + \widehat{p}'),$$

равен $u(x)$ (6) для некоторого $\rho \in X$ ($2\rho \neq 0$), удовлетворяющего п. 9.9.П). Следовательно, каждый из вариантов, $\widehat{\mu} = (2\ell + 1, 2k, 2, 0)$ и $\widehat{\mu} = (2\ell + 1, 2k, 0, 2)$, приводит к паре эллиптических конечно-зонных потенциалов, соответствующих слою над $X \in \mathfrak{X}$ каждой коники, содержащейся в $\mathcal{C}_{\vec{a}} \setminus \mathcal{A}^\circ(\mathcal{R}(n, \mu(\vec{a})))$, дополнении к образу $\mathcal{R}(n, \mu(\vec{a}))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Airault, H. P. Mc Kean, J. Moser. Rational and elliptic solutions of the Korteweg–de Vries equation and a related many body problem // *Comm. Pure Appl. Math.* 1977. V. 30. P. 95–148.
- [2] A. Altman, S. Kleiman. Compactifying the Picard scheme // *Adv. in Math.* 1980. V. 35. P. 50–112.
- [3] М. В. Бабич, А. И. Бобенко, В. Б. Матвеев. Редукция тэта-функций Римана рода g к тэта-функциям младших родов и симметрии алгебраических кривых // *Докл. АН СССР* 1983. Т. 272. № 1. С. 13–17.
- [4] М. В. Бабич, А. И. Бобенко, В. Б. Матвеев. Решения нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, в тэта-функциях Якоби и симметрии алгебраических кривых // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1985. Т. 49. С. 511–529.
- [5] Е. Д. Белокопос, В. З. Энольский. Эллиптические солитоны Вердье и теория редукции Вейерштрасса // *Функц. анализ и его прил.* 1989. V. 23. № 1. P. 57–58.
- [6] E. D. Belokolos, V. Z. Enolskii. Reduction of theta functions and elliptic finite-gap potentials // *Acta Appl. Math.* 1994. V. 36. P. 87–117.
- [7] Е. Д. Белокопос, А. И. Бобенко, В. З. Энольский, В. Б. Матвеев. Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечно-зонных решений интегрируемых нелинейных уравнений // *УМН.* 1986. Т. 41. № 2. С. 3–42.
- [8] R. Dickson, F. Gesztesy, K. Unterkofler. A new approach to the Boussinesq hierarchy // *Math. Nachr.* 1999. V. 198. P. 51–108.
- [9] R. Dickson, F. Gesztesy, K. Unterkofler. Algebraic-geometric solutions of the Boussinesq hierarchy // *Rev. Math. Phys.* 1999. V. 11. № 7. P. 823–879.
- [10] Б. А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Вриза в классе конечно-зонных потенциалов // *Функц. анализ и его прил.* 1975. Т. 9. № 3. С. 41–51.
- [11] Б. А. Дубровин. Тэта-функции и нелинейные уравнения. (С приложением И. М. Кривичева.) // *УМН.* 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
- [12] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Вриза, конечно-зонные операторы и абелевы многообразия // *УМН.* 1976. Т. 31. № 1. С. 55–135.
- [13] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Периодические и условно-периодические аналоги много-солитонных решений уравнения Кортевега–де Вриза // *ЖЭТФ.* 1974. Т. 67. № 6. С. 2131–2144.
- [14] V. Z. Enol'skii, N. A. Kostov. On the geometry of elliptic solitons // *Acta Appl. Math.* 1994. V. 36. № 1–2. P. 57–86.
- [15] J. D. Fay. On the even-order vanishing of Jacobian theta functions // *Duke Math. J.* 1984. V. 51. P. 109–132.
- [16] H. Flaschka. On the inverse problem for Hill's operator // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1975. V. 59. P. 293–309.
- [17] L. Gavrilov, A. M. Perelomov. On the explicit solutions of the elliptic Calogero system // *J. Math. Phys.* 1999. V. 40. № 12. P. 6339–6352.
- [18] F. Gesztesy, R. Weikard. Treibich–Verdier potentials and the stationary (m) KdV hierarchy // *Math. Z.* 1995. V. 219. P. 451–476.
- [19] F. Gesztesy, R. Weikard. A characterization of elliptic finite-gap potentials // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1995. V. 321. P. 837–841.
- [20] F. Gesztesy, R. Weikard. Elliptic algebro-geometric solutions of the KdV and AKNS hierarchies – an analytic approach // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1998. V. 35. № 4. P. 271–317.
- [21] F. Gesztesy, R. Weikard. Picard potentials and Hill's equation on a torus // *Acta Math.* 1996. V. 176. P. 73–107.
- [22] F. Gesztesy, R. Weikard. On Picard potentials // *Differential Integral Equations.* 1995. V. 8. № 6. P. 1453–1476.
- [23] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
- [24] G. Halphen. Mémoire sur la réduction des équations différentielles aux formes intégrales // *Mem. Pres. Acad. Sci. France.* 1884. V. 28. P. 1–300.
- [25] C. Hermite. Œuvres. V. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1912.

- [26] E. L. Ince. Further investigations into the periodic Lamé equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1940. V. 60. P. 83–99.
- [27] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев. Оператор Шредингера с конечно-зонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Вриза // ТМФ. 1975. Т. 23. С. 51–68.
- [28] И. М. Кричевер. Алгебро-геометрическая конструкция уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 291–294.
- [29] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 180–208.
- [30] И. М. Кричевер. Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14. С. 45–54.
- [31] H. P. McKean, P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation // Invent. Math. 1975. V. 30. P. 217–274.
- [32] С. П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Вриза // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. С. 236–246.
- [33] G. Segal, G. Wilson. Loop groups and equations of KdV type // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1985. V. 61. P. 5–65.
- [34] А. О. Смирнов. Эллиптические решения уравнения Кортевега–де Вриза // Матем. заметки. 1989. Т. 45. С. 66–73.
- [35] A. O. Smirnov. Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. № 1–2. P. 125–166.
- [36] A. Treibich. Tangential polynomials and elliptic solitons // Duke Math. J. 1989. V. 59. № 3. P. 611–627.
- [37] A. Treibich. New elliptic potentials // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 27–48.
- [38] A. Treibich, J. L. Verdier. Solitons elliptiques. (With an appendix by J. Oesterle.) // Progr. in Math. 1990. V. 88. P. 437–480.
- [39] A. Treibich, J. L. Verdier. Variétés de Krichever des solitons elliptiques de KP // Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry, Bombay 1989 / ed. S. Ramanan et al. Delhi: Hindustan Book Agency, 1993. P. 187–232.
- [40] A. Treibich, J. L. Verdier. Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombres triangulaires // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1990. V. 311. P. 51–54.
- [41] A. Treibich, J. L. Verdier. Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires // Duke Math. J. 1992. V. 68. № 2. P. 217–236.
- [42] K. Unterkofer. On the solution of Halphen's equation // Differential Integral Equations. 2001. V. 14. № 9. P. 1025–1050.

Предметный указатель

вложение Абеля п. 1.3; функция Бейкера–Ахиезера п. 1.1; исключительное накрытие п. 4.3; исключительный дивизор п. 4.1; n -подходящий вектор п. 2.4; гиперэллиптическая инволюция п. 6.7; гиперэллиптическая отмеченная кривая п. 1.2; эллиптический конечно-зонный потенциал п. 1.13; компактифицированный якобиан п. 1.6; обобщенный якобиан п. 1.3; конечно-зонный потенциал п. 1.2; (n -й) КдВ-локус п. 1.8.2); пространство модулей эллиптических кривых ($\mathfrak{X}$) п. 7.6; пространство модулей компактифицированных якобианов ($\mathscr{W}(n, \mu)$ и $\mathscr{W}(n)$) п. 7.7; непримитивная функция п. 1.13; орбитный морфизм п. 1.7.3); частичное упорядочение $((m, \nu) \prec (n, \mu))$ п. 4.5; плоская модель п. 7.4; порождающий потенциал п. 5.7; касательное накрытие п. 1.4; гиперэллиптическое касательное накрытие п. 1.4; минимально-гиперэллиптическое касательное накрытие п. 1.9; критерий касательности п. 1.5; касательная функция п. 1.5; θ -характеристика п. 1.6; каноническая θ -характеристика $\{\xi_{A,k}, \xi_{B,k} (k = 0, \dots, 3)\}$ п. 5.3.3); тэта-дивизор п. 1.7.3); тип π п. 2.1; универсальная эллиптическая кривая п. 7.6; $\wp$ -функция Вейерштрасса п. 1.8.2).

Указатель обозначений

- п. 1.1 $\psi_D(x, y, t; \lambda), \xi_{j,D}(x, y, t);$
- п. 1.2 $u_D(x, y, t);$
- п. 1.3 $A_p: (\Gamma, p) \dashrightarrow \text{Jac } \Gamma, i_\pi, \Lambda;$
- п. 1.6 $W(\Gamma), \omega_\Gamma, \mathcal{L}^*;$
- п. 1.7 $\Theta_\Gamma, \text{Orb}_{\mathcal{L}}: X \rightarrow W(\Gamma), X_n, \Gamma^\circ, \Gamma_g^\circ, I_\pi: W(\Gamma) \rightarrow X_n;$
- п. 1.8 $\wp, \lambda_\pi, \text{KdV}(n, X);$
- п. 1.12 $W(n, X), R(n, X), I_n(X): W(n, X) \rightarrow \text{KdV}(n, X);$
- п. 2.1 $\mathcal{E}, S, C_0, \pi_S: S \rightarrow X, \tau, s_i, r_i (i = 0, \dots, 3), S^\perp, \pi_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow X,$
 $\tau^\perp, s_i^\perp, r_i^\perp (i = 0, \dots, 3), e: S^\perp \rightarrow S, S^\sim, \phi: S^\perp \rightarrow S^\sim;$
- п. 2.2 $i^\perp, \mu, \mu^{(1)}, \mu^{(2)};$
- п. 2.3 $S_0;$
- п. 2.5 $\lambda(n, \mu);$
- п. 2.8 $R(n, \mu, X);$
- п. 3 $\ell, \ell^\sim, s_i^\sim, r_i^\sim (i = 0, \dots, 3);$
- п. 3.1 $S_i^\sim (i = 0, \dots, 3);$
- п. 3.3 $K, K^\perp, K^\sim;$
- п. 4.1 $C_\mu^\sim;$
- п. 4.3 $C_\mu^\perp, p_\mu;$
- п. 4.11 $\chi_y;$
- п. 5.3 $\xi_{A,i}, \xi_{B,i} (i = 0, \dots, 3);$
- п. 5.4 $m_i^{A,0}, m_i^{B,0} (i = 0, \dots, 3);$
- п. 6.4 $\mathbb{M}, \mathbb{M}^{\#i}, A^i, B^i: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}^4 (i = 0, \dots, 3);$
- п. 7.4 $\mathbb{H}, \mathcal{C}_{\vec{a}} (\vec{a} \in \mathbb{N}^4);$
- п. 7.6 $\mathfrak{X}, \mathcal{R}(n, \mu), \mathcal{A}^i, \mathcal{B}^i: \mathcal{R}(n, \mu) \rightarrow \mathcal{C}_{\vec{a}} (i = 0, \dots, 3), O_1, O_2, O_3;$
- п. 7.7 $\mathcal{W}(n, \mu), \mathcal{KdV}(n), \overline{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}, (\overline{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X})_n, \mathcal{W}(n), \mathcal{I}_n;$
- п. 8.1 $P(\alpha, \beta, \gamma), F_{\vec{a}}(e_0, e_1, e_2, e_3) (\vec{a} \in \mathbb{N}^4), \varphi: \widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H};$
- п. 8.2 $E_j (j = 1, 2, 3);$
- п. 8.3 $\widehat{\widehat{\mathbb{H}}};$
- п. 8.5 $\widehat{\widehat{\mathcal{C}}}_{\vec{a}}, R_{\vec{a}}^{++++}, R_{\vec{a}}^{-+++}, R_{\vec{a}}^{+-+}, R_{\vec{a}}^{+--+} (\vec{a} \in \mathbb{N}^4);$
- п. 8.6 $\mathcal{C}on_{\vec{a}}, \mathcal{C}_{\vec{a}}^{++++}, \mathcal{C}_{\vec{a}}^{-+++}, \mathcal{C}_{\vec{a}}^{+-+}, \mathcal{C}_{\vec{a}}^{+--+}, \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{++++}, \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{-+++}, \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{+-+}, \widehat{\mathcal{C}}_{\vec{a}}^{+--+}$
 $(\vec{a} \in \mathbb{N}^4);$
- п. 9.3 $\mathcal{Q}_{\vec{a}};$
- п. 9.9 $\prod_{\vec{a}}.$