Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ружанский, Регулярность параметрикса задачи с косой производной,
УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 137–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:16:46

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

РЕГУЛЯРНОСТЬ ПАРАМЕТРИКСА
ЗАДАЧИ С КОСЫЙ ПРОИЗВОДНОЙ

М. В. Ружанский

В статье даются L^p -оценки для оператора решения задачи с косой производной [1], [2]. Анализ базируется на представлении параметрикса задачи с косой производной в виде интегрального оператора Фурье с комплекснозначной фазовой функцией.

Пусть X — компактное многообразие размерности n , и пусть Γ — гладкая замкнутая гиперповерхность в X . Будем предполагать, что $X \setminus \Gamma$ представимо как объединение открытых непересекающихся множеств X_+ и X_- , для которых Γ — их общая граница. Будем обозначать через S_c^m пространство классических символов порядка m , т.е. подпространство пространства символов $S_{1,0}^m$, содержащее символы a , которые локально в каждом открытом конусе V разлагаются в асимптотический ряд

$$a(x, \theta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x, \theta),$$

где a_{m-j} положительно однородны порядка $m-j$ по θ . Пространство символов $S_{1,0}^m$ состоит из гладких функций a , для которых локально однородно по x выполнена оценка

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\theta|)^{m-|\beta|}$$

для всех мультииндексов α и β . Класс псевдодифференциальных операторов в X с символами из S_c^m обозначается через $\Psi_c^1(X)$.

Пусть оператор $P \in \Psi_c^1(X)$ имеет вид

$$P(x, D_x) = m(x, D_x) + iQ(x, D_x), \quad (1)$$

где $D_x = -i\partial_x$, $m(x, \partial_x)$ — вещественное векторное поле на X и $Q \in \Psi_c^1(X)$ имеет вещественный главный символ q . Предположим также, что q постоянного знака в X_+ и в X_- , т.е. $q(x, \xi) \leq 0$ для $x \in X_+$ и $q(x, \xi) \geq 0$ для $x \in X_-$. Обозначим через K множество точек $x \in X$ таких, что $q(x, \xi) = 0$ для некоторого $\xi \neq 0$. В частности, имеем $\Gamma \subset K$, так как $q(x, \xi) = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Предположим также, что

- 1) $m(x, D_x)$ не обращается в нуль на K ;
- 2) ни одна из максимальных интегральных кривых поля m не содержится полностью в K ;
- 3) m пересекает Γ трансверсально и направлено в сторону X_+ .

Свойства фундаментальных решений оператора P изучались многими авторами (см. [1] и библиографию в [2]). Обозначим через E правый параметрикс для P , т.е. имеем $P \circ E \equiv I$ и $E \circ P \equiv I - F_+$, где F_+ – интегральный оператор Фурье положительного типа нулевого порядка. Положительный тип здесь означает, что в локальных координатах мнимая часть фазовой функции оператора неотрицательна. Такие операторы изучены в [3]–[5].

Несложно убедиться, что на дополнении к характеристическому множеству оператора P существует единственный микролокальный параметрикс $P^{-1} \in \Psi^{-1}(X)$, задаваемый оператором E . В [2] показано, что E непрерывен из $(L^2_\alpha)_{\text{comp}}(X_\pm)$ в $L^2_\alpha(X)$ и из $L^2_\alpha(X)$ в $L^2_\alpha(X)$ для всех α . Применяя оценки в L^p для интегральных операторов Фурье с комплексными фазовыми функциями и дополнительный анализ в окрестности Γ , можно получить дополнительные свойства регулярности параметрикса оператора P .

ТЕОРЕМА 1. Пусть P удовлетворяет условиям 1)–3). Тогда оператор E непрерывен из $(L^p_{\alpha+(n-1)|1/p-1/2|})_{\text{comp}}(X_\pm)$ в $L^p_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 < p < \infty$. Более того, E непрерывен из $L^2_{\alpha+n(1/2-1/q)}(X)$ в $L^p_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $p \geq 2$.

Основная трудность при доказательстве второго утверждения заключается в том, что хотя интегральные операторы Фурье $\exp(-itP) \circ \pi_\pm$ нулевого порядка в X , в окрестности Γ требуются дополнительные оценки. Из этих операторов интегрированием по t получается оператор E (см. [3]). Оценки для интегральных операторов Фурье с комплексными фазовыми функциями получаются аналогично стандартным L^p -оценкам, описанным в [6]. Используя L^p -непрерывность из теоремы 1 и непрерывность операторов порядка $-n/2$ из пространства Харди H^1 в L^2 (см., например, [6]) в качестве граничных условий для метода комплексной интерполяции, можно получить также и $L^p - L^q$ результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P удовлетворяет условиям 1)–3). Пусть $1 < p \leq q \leq 2$. Тогда оператор E непрерывен из $(L^p_{\alpha+|1/q-n/p+(n-1)/2|})_{\text{comp}}(X_\pm)$ в $L^q_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Двойственный результат выполнен для $2 \leq p \leq q < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Мазья, Б. П. Панея // Функциональный анализ и его прил. 1969. Т. 3. С. 159–160.
- [2] A. Melin, J. Sjöstrand // Comm. Partial Differential Equations. 1976. V. 1. P. 313–400.
- [3] A. Melin, J. Sjöstrand // Lecture Notes in Math. 1975. V. 459. P. 120–223. [4] Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. III, IV. М.: Мир, 1968–1988. [5] Ю. В. Егоров. Микролокальный анализ // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 33: ВИНТИ, 1988. [6] М. В. Ружанский // УМН. 2000. Т. 55. С. 99–170.

Имперский колледж, Лондонский университет
E-mail: ruzh@ic.ac.uk

Принято редколлегией
24.09.2001