Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Балаба, О слабо примитивных градуированных кольцах, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:09:46

О СЛАБО ПРИМИТИВНЫХ ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

И. Н. БАЛАБА

Наиболее сильным обобщением классической теоремы плотности Джекобсона для первичных колец является теорема Зельмановича, опубликованная в [1], где было дано полное описание слабо примитивных колец. В работе дано описание градуированных слабо примитивных колец, основанное на градуированной версии теоремы Зельмановича [2].

Пусть G – полугруппа, H – группа и A – (H, G) -полигон. Следуя [3], назовем полигон A_G *строго точным*, если из того, что $ag_1 = ag_2$ ($a \in A$, $g_1, g_2 \in G$), следует, что $g_1 = g_2$. Далее будем считать, что A является строго точным правым G -полигоном и левым H -полигоном, и полугруппа G действует на нем инъективно, т.е. если $a_1g = a_2g$, то $a_1 = a_2$.

Всюду далее R – G -градуированное кольцо, M – A -градуированный правый R -модуль, $\text{END}(M_R)$ – H -градуированное кольцо эндоморфизмов, $h(R)$ – множество однородных элементов кольца R . Градуированным по группе G кольцам посвящена монография [4], в [5] градуировка колец и модулей рассматривалась по полугруппе, а в [6] были рассмотрены модули, градуированные множеством, на котором действует группа G .

Напомним некоторые определения.

Модуль M называется *критически сжимаемым*, если он вкладывается однородным гомоморфизмом в каждый свой ненулевой градуированный подмодуль и не вкладывается ни в какой свой собственный фактор-модуль. Градуированное кольцо называется *слабо примитивным*, если оно обладает точным критически сжимаемым градуированным модулем. Градуированное кольцо R называется *первичным*, если для любых градуированных идеалов I и J кольца R из $IJ = 0$ следует, что либо $I = 0$, либо $J = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Градуированное слабо примитивное кольцо первично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_R – точный критически сжимаемый градуированный R -модуль. Если $I \neq 0$ и $J \neq 0$ – градуированные идеалы кольца R , то $MI \neq 0$ и $MJ \neq 0$. Так как M_R сжимаем, то существует мономорфизм $f \in h(\text{НОМ}_R(M, MI))$. Тогда $0 \neq f(MJ) = f(M)J \subseteq MIJ$. Таким образом, $IJ \neq 0$ и, следовательно, R – первичное кольцо.

Пусть, далее, полигон HA_G обладает следующим свойством: для любых $a_1, \dots, a_n \in A$, $h \in H$ существуют такие элементы $g_{ij} \in G$, что $ha_i = a_jg_{ij}$.

Легко видеть, что в этом случае кольцо матриц $M_n(S)$ над H -градуированным кольцом S можно рассматривать как G -градуированное кольцо $M_n(S)(a_1, \dots, a_n)$, где

$$M_n(S)_g(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} S_{a_1ga_1^{-1}} & S_{a_1ga_2^{-1}} & \dots & S_{a_1ga_n^{-1}} \\ S_{a_2ga_1^{-1}} & S_{a_2ga_2^{-1}} & \dots & S_{a_2ga_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{a_nga_1^{-1}} & S_{a_nga_2^{-1}} & \dots & S_{a_nga_n^{-1}} \end{pmatrix},$$

здесь через $a_iga_j^{-1}$ обозначен такой элемент $h \in H$, для которого $ha_j = a_ig$, если же такого h не существует, то положим $S_{a_iga_j^{-1}} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть V – конечномерное A -градуированное векторное пространство над H -градуированным телом Δ с базисом $v_1, \dots, v_n$, где $v_i \in Va_i$. Тогда $\text{End}(\Delta V) = \text{END}(\Delta V) \approx M_n(\Delta)(a_1, \dots, a_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \text{End}(\Delta V)$, тогда $(v_i)f = \sum_{j=1}^n d_{ij}v_j$, где $d_{ij} \in \Delta$, и пусть $d_{ij} = \sum_{k=1}^{t_{ij}} d_{ij}^k$, где $d_{ij}^k \in \Delta_{h_{ij}^k}$. В силу условий, наложенных на полигон, существуют такие $g_{ij}^k \in G$, что $h_{ij}^ka_j = a_ig_{ij}^k$. Легко проверить, что $(Va)f \subseteq \sum_{g \in T} Va_g$, где $T = \{g_{ij}^k\}$, и, следовательно, $\text{End}(\Delta V) = \text{END}(\Delta V)$.

Если же $f \in \text{END}(\Delta V)_g$, то в представлении $(v_i)f = \sum_{j=1}^n d_{ij}v_j$ все элементы d_{ij} можно считать однородными и $\deg(d_{ij})a_j = a_i g$. Таким образом, отображение $\Phi: f \mapsto (d_{ij})$ определяет изоморфизм градуированных колец $\text{END}(\Delta V)$ и $M_n(\Delta)(a_1, \dots, a_n)$.

Градуированное подкольцо R кольца Q назовем *градуированным правым порядком в Q* , если Q содержит единицу и для любого $q \in h(Q)$ найдутся такие $r, s \in h(R)$, причем s – обратимый в Q , для которых $q = rs^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть R – градуированное слабо примитивное кольцо. Тогда: либо (1) R – правый порядок в матричном кольце $M_n(\Delta)$ для некоторого градуированного тела Δ (в этом случае R содержит градуированное подкольцо, изоморфное $M_n(D)$ для некоторого градуированного правого порядка D в Δ); либо (2) для каждого положительного целого числа n существуют градуированный правый порядок D тела Δ и градуированное подкольцо кольца R , которое гомоморфно отображается на $M_n(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_R – точный критически сжимаемый A -градуированный модуль, тогда $\Delta = \text{END}(\overline{M}_R) - H$ -градуированное тело и $\overline{M} = \Delta M$ (здесь $\overline{M}$ – градуированная квазинъективная оболочка модуля M).

Предположим, что $\dim_{\Delta} \overline{M} \geq n$, тогда можно выбрать Δ -линейно независимые элементы $m_1, \dots, m_n \in h(M)$ ($m_i \in M_{a_i}$). Для каждого $i = 1, \dots, n$ положим $A_i = \bigcap_{j \neq i} m_j^r$. По теореме слабой плотности [7] $m_i A_i \neq 0$, тогда $N = \bigcap_{i=1}^n m_i A_i \neq 0$.

Положим $D_h = \{a \in \Delta_h \mid aM \subseteq N\}$, $D = \bigoplus_{h \in H} D_h$. Если $0 \neq \lambda \in h(\Delta)$, то $\lambda^{-1}(N) \cap N \neq 0$ и существует мономорфизм $a \in h(D)$, для которого $aM \subseteq \lambda^{-1}(N) \cap N$. Следовательно, $0 \neq \lambda a \in D$ и D – градуированный правый порядок в Δ .

Пусть далее $W_n = \sum_{i=1}^n D m_i$, $W'_n = \sum_{i=1}^n D^1 m_i$ (D^1 – теоретико-множественное объединение D и множества рациональных чисел) и $\varphi \in \text{HOM}_D(W', W)_g$. Тогда $(m_i)\varphi = \sum_{j=1}^n d_{ij} m_j$ для подходящих $d_{ij} \in h(D)$. Поскольку $d_{ij} m_j \in h(N)$, то $d_{ij} m_j = m_i r_{ij}$ для некоторых $r_{ij} \in (A_i)_g$. Таким образом, $(m_i)\varphi = \sum_{j=1}^n m_i r_{ij} = m_i r_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \in (A_i)_g$. Положив $r = \sum_{i=1}^n r_i$, получим, что $(m_i)\varphi = m_i r$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Легко видеть, что $S = \{s \in R \mid W' s \subseteq W\}$ является градуированным подкольцом кольца R . Отображение $s \mapsto r_s|_{W'}$, где r_s – правое умножение на элемент s , определяет гомоморфизм кольца S на $\text{HOM}_D(W', W) \approx M_n(D)(a_1, \dots, a_n)$ с ядром $K = \{r \in R \mid W' r = 0\}$.

Если же $\dim_{\Delta} \overline{M} = n$, то элементы $m_1, \dots, m_n \in h(M)$ образуют базис $_{\Delta} \overline{M}$ и $K = 0$. Таким образом, R содержит градуированное подкольцо, изоморфное $M_n(D)(a_1, \dots, a_n)$ для некоторого градуированного правого порядка D в Δ .

Полагая $U = U' = \overline{M}$ в условии (3) теоремы из [2], получим, что для любого $f \in \text{END}(\Delta \overline{M})$ существуют такие $r, s \in R$, что $(fr - s)|_U = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом. Таким образом, R является правым порядком в кольце $\text{END}(\Delta \overline{M}) = \text{End}(\Delta \overline{M}) \approx M_n(\Delta)$.

В заключение приношу искреннюю благодарность А. В. Михалёву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Zelmanowitz // Comm. Algebra. 1981. V. 9. № 1. P. 23–45. [2] С. В. Зеленов // УМН. 2001. Т. 56. № 3. С. 167–168. [3] M. Kilp, U. Krauner, A. V. Mikhalev. Monoids, Acts and Categories. Berlin: de Gruyter, 2000. [4] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen. Graded Ring Theory. Amsterdam: North-Holland, 1982. [5] G. Abrams, C. Menini, A. del Rio // Comm. Algebra. 1994. V. 22. № 13. P. 5343–5388. [6] C. Năstăsescu, S. Raianu, F. van Oystaeyen // Math. Z. 1990. V. 203. № 4. P. 605–627. [7] С. В. Зеленов // Труды 6-х математических чтений МГСУ. М.: МГСУ, 1999. С. 107–110.

Тульский государственный
педагогический университет им. Л. Н. Толстого
E-mail: IBalaba@mail.ru

Принято редколлегией
24.09.2001