Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Многообразие решений уравнения $\left[\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} - 6\wp_{1,2}(u_1, u_2) + E \right] \psi = 0$, УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:37:13

МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} - 6\wp_{1,2}(u_1, u_2) + E \right] \psi = 0$$

В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН

Пусть $\sigma = \sigma(u_1, u_2; \lambda)$ — сигма-функция на универсальном расслоении $\mathcal{V}$ якобианов кривых $V_\lambda(\mu, \nu) = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \mid f(\mu, \nu) = \nu^2 - (4\mu^5 + \lambda_3\mu^3 + \lambda_2\mu^2 + \lambda_1\mu + \lambda_0) = 0\}$. Это целая функция всех своих аргументов $u_1, u_2, \lambda_0, \dots$, которая в нуле разлагается в ряд с *рациональными коэффициентами*. Как обычно, положим $\zeta_i(u) = \partial_i \ln \sigma(u)$, $\wp_{ij}(u) = -\partial_{i,j} \ln \sigma(u)$, $\wp_{ijk}(u) = -\partial_{i,j,k} \ln \sigma(u)$ и т. д., где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\partial_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}$, $\dots$, $i, j, k = 1, 2$.

В этой заметке мы описываем многообразие решений уравнения

$$L(E)\psi(u; \alpha, \beta, k) = 0 \quad (1)$$

для оператора с 4-периодическим потенциалом и блоховской волновой функции, где

$$L(a, E) = \partial_{1,2} - 6\wp_{1,2}(u) + E \quad \text{и} \quad \psi(u; \alpha, \beta, k) = \frac{\sigma(u + \alpha)\sigma(u + \beta)}{\sigma(u)^2\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \exp\{-u^t(\zeta(\alpha) + \zeta(\beta) - k)\},$$

$\zeta(v) = (\zeta_1(v), \zeta_2(v))^t$; здесь $\alpha, \beta, k \in \mathbb{C}^2$ и E не зависят от u и являются параметрами.

Рассмотрим универсальное расслоение $\mathcal{W}$ симметрических квадратов $\text{Sym}^2(\text{Jac}(V_\lambda))$ якобианов. Введем вектор-функцию $p([\alpha, \beta], \lambda) = (x; y; z)$ на $\mathcal{W}$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $x_{i+j-1} = \wp_{i,j}(\alpha) + \wp_{i,j}(\beta)$; $y = (y_1, \dots, y_4)$ и $y_{i+j+k-2} = \wp_{i,j,k}(\alpha) + \wp_{i,j,k}(\beta)$; $z = (z_1, \dots, z_5)$ и $z_{i+j+k+\ell-3} = \wp_{i,j,k,\ell}(\alpha) + \wp_{i,j,k,\ell}(\beta)$; скобки $[\cdot, \cdot]$ — обозначение неупорядоченной пары.

Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}([\alpha, \beta], \lambda; k_1, k_2, E)$ многообразие решений уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, где:

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}([\alpha, \beta], \lambda; k_1, 0, 0)$ — подмногообразие в $\mathcal{W}$, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_2 = 0, & x_3 = 0, & y_3 = 0, & y_4 = -2k_1; \\ \lambda_0 = -\frac{1}{8}(3k_1y_2 + z_1), & \lambda_1 = 0, & \lambda_2 = k_1^2 - 2x_1, & \lambda_3 = z_5; \end{cases} \quad (2)$$

$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}([\alpha, \beta], \lambda; 0, 0, E)$ — подмногообразие в $\mathcal{W}$, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{E}{2}, & x_3 = 0, & y_3 = 0, & y_4 = 0, \\ \lambda_0 = -\frac{1}{32}(E(8x_1 + z_4) + 4z_2), & \lambda_1 = \frac{E^2}{4}, & \lambda_2 = \frac{1}{2}(z_4 - 4x_1), & \lambda_3 = 2E + z_5. \end{cases} \quad (3)$$

Теорема допускает прямое доказательство, основанное на том факте, что целая функция $\phi(u) = \sigma(u)^3 L\psi$, по построению, принадлежит линейному пространству размерности 9. Как уравнения (2), так и уравнения (3) накладывают условия, что росток в нуле соответствующей им функции $\phi(u)$ равен нулю по модулю мономов степени > 3 , в то время как коэффициенты разложения функции $\phi(u)$ по базису полностью восстанавливаются по этой струе. Вывод уравнений (2) и (3) использует такой отрезок ряда σ -функции: $\sigma(u, \lambda) = u_1 + \frac{1}{24}(\lambda_2 u_1^3 - 8u_2^3) + \frac{1}{48}(\frac{1}{40}(\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3)u_1^5 - 4\lambda_0 u_1^4 u_2 - 2\lambda_1 u_1^3 u_2^2 - 2\lambda_2 u_1^2 u_2^3 - \lambda_3 u_1 u_2^4) + O(u^7)$.

Дополним вектор-функцию матрицами функций $T = \{T_{i+j-1, k+\ell-1} = (\wp_{i,j}(\alpha) - \wp_{i,j}(\beta)) \times (\wp_{k,\ell}(\alpha) - \wp_{k,\ell}(\beta))\}$ и $S = \{S_{i,k} = (\wp_{i,2,2}(\alpha) - \wp_{i,2,2}(\beta))(\wp_{k,2,2}(\alpha) - \wp_{k,2,2}(\beta))\}$ ранга 1 и зададим отображение $w: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}^{21}: ([\alpha, \beta], \lambda) \mapsto ((x; y; z), T, S)$.

ТЕОРЕМА 2. Отображение w является мероморфным вложением. При этом многообразия $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ переходят в семейства трехмерных алгебраических подмногообразий $\mathcal{N}_1(k_1)$ и $\mathcal{N}_2(E)$ в $\mathbb{C}^{21}$.

Доказательство теоремы основывается на соотношениях в поле абелевых функций рода 2 (см. [1], [2]) и уравнениях (2) и (3). Далее, зададим семейство отображений

$$\gamma(\cdot, \cdot; k_1, E): \mathbb{C}^2 \rightarrow \text{Sym}^2(\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)): (q, r) \mapsto ([(\mu_1^+, \nu_1^+), (\mu_2^+, \nu_2^+)], [(\mu_1^-, \nu_1^-), (\mu_2^-, \nu_2^-)]),$$

где $(\mu^\pm, \nu^\pm)$ – решения систем

$$\begin{cases} \mu^2 - \frac{E}{2} + q\sqrt{r} = 0 \\ \nu = -2k_1\mu + (q^2 + \mu)\sqrt{r} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mu^2 - \frac{E}{2} - q\sqrt{r} = 0 \\ \nu = -2k_1\mu - (q^2 + \mu)\sqrt{r} \end{cases}. \quad (4)$$

Нам потребуется также семейство отображений

$$\delta(\cdot, \cdot, \cdot; k_1, E): \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4: (q, r, s) \mapsto \left(\frac{1}{12}r[E - 2k_1q + 4(Es - q^2)^2], \frac{1}{4}E^2, k_1^2 + \frac{3}{4}r, 2E + 4sr\right).$$

Пусть $j: \text{Jac}(V_\lambda) \rightarrow \text{Sym}^2(V_\lambda) \subset \text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ – отображение Якоби и

$$\chi: \mathcal{W} \rightarrow \text{Sym}^2(\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)) \times \mathbb{C}^4: \chi([\alpha, \beta], \lambda) = ([j(\alpha), j(\beta)], \lambda).$$

ТЕОРЕМА 3. *Имеют место следующие семейства параметризующих отображений $R_1: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathcal{M}_1$ и $R_2: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2$, которые однозначно определяются тем, что*

$$\chi(R_1(q, r, s)) = (\gamma(q, r; k_1, 0), \delta(q, r, s; k_1, 0)) \quad \text{и} \quad \chi(R_2(q, r, s)) = (\gamma(q, r; 0, E), \delta(q, r, s; 0, E)).$$

Доказательство существенно использует явное описание многообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ из теоремы 2 и каноническое отображение $\mathbb{C}^{21} \rightarrow \text{Sym}^2(\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)) \times \mathbb{C}^4$, которое строится на основе явного выражения значений базисных абелевых функций в точке $\xi \in \text{Jac}(V_\lambda)$ в терминах рациональных функций от $j(\xi)$ [1], [2]. Дадим теперь алгоритм построения решений уравнения (1).

Пусть дан набор $(q, r, s; k_1)$. Тогда уравнение кривой V_λ имеет вид

$$\nu^2 = 4\mu^5 + 4rs\mu^3 + (k_1^2 + \frac{3}{4}r)\mu^2 - \frac{qr}{6}(k_1 - 2q^3).$$

Используя корни системы уравнений (4) при $E = 0$, находим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{\infty}^{(\mu_1^+, \nu_1^+)} + \int_{\infty}^{(\mu_2^+, \nu_2^+)} \frac{d\mu}{\nu}, & \beta_1 &= \int_{\infty}^{(\mu_1^-, \nu_1^-)} + \int_{\infty}^{(\mu_2^-, \nu_2^-)} \frac{d\mu}{\nu}, \\ \alpha_2 &= \int_{\infty}^{(\mu_1^+, \nu_1^+)} + \int_{\infty}^{(\mu_2^+, \nu_2^+)} \frac{\mu d\mu}{\nu}, & \beta_2 &= \int_{\infty}^{(\mu_1^-, \nu_1^-)} + \int_{\infty}^{(\mu_2^-, \nu_2^-)} \frac{\mu d\mu}{\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подмногообразие в $\mathcal{M}_1$, выделенное фиксацией значений параметров $\{\lambda_0, \lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3\}$, представляет собой плоскую кривую $\Gamma = \{(k_1, q) \in \mathbb{C}^2 \mid 2q(2q^3 - k_1)(\lambda_2 - k_1^2) - 9\lambda_0 = 0\}$ с инволюцией $(q, k_1) \mapsto (-q, -k_1)$, а параметры $s = \frac{3\lambda_3}{16(\lambda_2 - k_1^2)}$ и $r = \frac{4}{3}(\lambda_2 - k_1^2)$ – становятся функциями на ней. Набор корней системы уравнений (4) через вычисление интегралов (5) определяет пару $[\alpha, \beta]$ как функцию на Γ .

Пусть дан набор $(q, r, s; E)$. Тогда уравнение кривой V_λ имеет вид

$$\nu^2 = 4\mu^5 + 2(E + 2rs)\mu^3 + \frac{3}{4}r\mu^2 + \frac{1}{12}r(E + 4(Es - q^2)^2).$$

Пару $[\alpha, \beta]$ находим по формулам (5), используя корни системы (4) при $k_1 = 0$. Подмногообразие в $\mathcal{M}_2$, выделенное фиксацией значений параметров $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, представляет собой набор из восьми точек с учетом кратностей.

При $\lambda = 0$ получаем $E = 0$, и уравнение $\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 = 0$ описывает многообразие решений $\mathcal{M}([(\alpha_1, 0), (\beta_1, 0)], 0; -3/(\alpha_1 + \beta_1), 0, 0)$. В то же время оператор $\partial_{11} + \partial_{22} - 6(\wp_{11} + \wp_{22})$ не имеет собственных функций вида $\psi(u; \alpha, \beta, k)$ при $\lambda = 0$, и, следовательно, многообразие решений для него пусто в общем случае, так как любые построения с $\sigma(u; \lambda)$ допускают непрерывный предельный переход $\lambda \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. F. Baker. Multiply periodic functions // CUP, 1907. [2] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 1–119.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;
Институт магнетизма НАН Украины, Киев
E-mail: buchtab@mendeleev.ru, dile@imag.kiev.ua

Принято редколлегией
22.10.2001