Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Годин, Структура идеалов полиномиальных почтиколец и их факторколец, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:41:28

СТРУКТУРА ИДЕАЛОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПОЧТИКОЛЕЦ И ИХ ФАКТОРКОЛЕЦ

А. А. Годин

Пусть R – кольцо. Пока не сказано обратное, R предполагается коммутативным. Пусть $R[x]$ – кольцо многочленов от переменной x , а $NR[x]$ – почтикольцо многочленов от переменной x . Напомним, что умножение в $NR[x]$ задается композицией многочленов [1].

Положим $R_0[x] := \{p \in R[x] | p(0) = 0\}$, $NR_0[x] := (NR[x])_0$, $NR_{0,n}[x] := NR_0[x] / \langle x^n \rangle$, $R_{0,n}[x] := R_0[x] / \langle x^n \rangle$. Рассмотрим связь между идеалами кольца многочленов и левыми идеалами соответствующего почтикольца.

ЛЕММА 1. *Все идеалы кольца многочленов $R_0[x]$ являются левыми идеалами соответствующего почтикольца $NR_0[x]$.*

Введем следующие обозначения:

$I \triangleleft_l R$: I – левый идеал (почти-)кольца R ;

$I \triangleleft_r R$: I – правый идеал (почти-)кольца R ;

$I \triangleleft R$: I – двусторонний идеал (почти-)кольца R .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть R – 2-делимое кольцо. Тогда:*

- 1) $I \triangleleft_l NR_0[x] \iff I \triangleleft R_0[x]$;
- 2) *двусторонние идеалы почтикольца $NR_0[x]$ – это идеалы кольца $R_0[x]$, выдерживающие подстановку.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если R – не 2-делимое кольцо, то существует идеал в $NR_0[x]$, не являющийся идеалом в $R_0[x]$.

Пусть R – поле, $\text{char } R \neq 2$.

ТЕОРЕМА 2. *Все идеалы почтикольца $NR_{0,n}$ исчерпываются идеалами кольца $R_{0,n}$, порожденными x^k для подходящего k .*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае произвольного конечного поля R утверждение предыдущей теоремы неверно.

Пусть R – коммутативное кольцо (не обязательно 2-делимое). Определим структуру почти-кольца многочленов от нескольких переменных следующим образом.

Пусть $\mathfrak{R}'_n = R[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных. Рассмотрим $\mathfrak{R}'_n$ и $N\mathfrak{R}'_n = NR[x_1, \dots, x_n] = \{\mathfrak{R}'_n, +, \circ\}$, где

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(q_1, \dots, q_n) \\ \vdots \\ p_n(q_1, \dots, q_n) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Определим $\mathfrak{R}_n := \{P \in \mathfrak{R}'_n \mid P(0) = 0\}$ и $N\mathfrak{R}_n := (N\mathfrak{R}'_n)_0$. Легко видеть, что $N\mathfrak{R}_n$ и $N\mathfrak{R}'_n$ – почтикольца, а $\{N\mathfrak{R}_n, +, \circ, \cdot\}$ и $\{N\mathfrak{R}'_n, +, \circ, \cdot\}$ – композиционные кольца.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть R – произвольное кольцо, $n \geq 2$. Тогда:*

- 1) $\mathfrak{I} \triangleleft_l N\mathfrak{R}_n$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$ – прямая сумма n экземпляров идеала $I \triangleleft \mathfrak{R}_n$;
- 2) $\mathfrak{I} \triangleleft N\mathfrak{R}'_n$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$ – прямая сумма n экземпляров идеала $I \triangleleft \mathfrak{R}'_n$, выдерживающего подстановку.

Пусть R – поле.

ТЕОРЕМА 4. *Если поле R – бесконечно, $n \geq 2$ или $\text{char } R \neq 2$, то идеалы почтикольца $N\mathfrak{R}_n$ – мономиальны.*

СЛЕДСТВИЕ. Если R – бесконечно и $\text{char } R \neq 2$, то все идеалы почтикольца $\text{NR}_0[x]$ порождены x^k для подходящего k .

ТЕОРЕМА 5. Если R – бесконечно и $n \geq 2$, то $\text{NR}'_n[n]$ просто.

ТЕОРЕМА 6 [2]. Если R – бесконечно, $n \geq 2$ и $\text{char } R \neq 2$, то $\text{NR}'_n[x]$ просто.

Пусть $\mathfrak{S}_n$ – идеал в $\mathfrak{R}_n$, порожденный многочленами полной степени n .

ТЕОРЕМА 7. Если R – поле характеристики 0, то все идеалы NR_n – в точности прямые суммы n экземпляров идеалов $\mathfrak{S}_k$ для подходящего k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае характеристики p этот результат неверен.

ЛЕММА 2. Пусть I – идеал, выдерживающий подстановки. Если D – степень минимального монома из I , то $\mathfrak{S}_{nD} \subset I$.

Заметим, что $\text{NR}_n/\mathfrak{S}_2$ – кольцо, изоморфное $M_n[R]$.

Рассмотрим теперь некоммутативный случай и $n \geq 2$. Далее R – произвольное (не обязательно коммутативное) кольцо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbf{V}$ – некое многообразие колец и $R \in \mathbf{V}$. Рассмотрим относительно свободное произведение $\mathfrak{R}_n = R *_{\mathbf{V}} F_{\mathbf{V}}(x_1, \dots, x_n)$, где $F_{\mathbf{V}}(x_1, \dots, x_n)$ – относительно свободная алгебра от образующих $x_1, \dots, x_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заметим, что если $\mathbf{V} = Ab$ – многообразие коммутативных колец, то наше определение дает “обычное” кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Определение почтикольца NR_n остается прежним, т.е. почтикольцом вектор-многочленов с покомпонентным сложением и композицией, заданной формулой (1). Аналогично определим кольцо $\mathfrak{R}_n^n$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть R – произвольное кольцо. Тогда:

- 1) $\mathfrak{I} \triangleleft_l \text{NR}_n$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$ – прямая сумма n экземпляров идеала $I \triangleleft \mathfrak{R}_n$;
- 2) двусторонние идеалы почтикольца NR_n – в точности прямые произведения n экземпляров идеала $I \triangleleft \mathfrak{R}_n$, выдерживающего подстановку (T -идеала).

Перейдем от конечной прямой суммы к бесконечной. Пусть $\mathfrak{R}_{\infty}$ – кольцо многочленов от бесконечного числа переменных (прямой предел колец $\mathfrak{R}_n$, $n \rightarrow \infty$). Тогда определим почтикольцо NR_{∞} как прямую сумму счетного числа $\mathfrak{R}_{\infty}$ с покомпонентным сложением и композицией $\circ$, определяемой так же, как и в NR_n . Корректность следует из определений прямой суммы и прямого предела. Аналогично определим кольцо $\mathfrak{R}_{\infty}^{\infty}$. Заметим, что $\text{NR}_{\infty} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \text{NR}_n$ и $\mathfrak{R}_{\infty}^{\infty} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{R}_n^n$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть R – произвольное кольцо. Тогда:

- 1) $\mathfrak{I} \triangleleft_l \text{NR}_{\infty}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$ – прямая сумма счетного числа экземпляров идеала $I \triangleleft \mathfrak{R}_{\infty}$;
- 2) двусторонние идеалы $\mathfrak{I} \triangleleft \text{NR}_{\infty}$ – в точности прямые произведения счетного числа экземпляров T -идеала $I \triangleleft \mathfrak{R}_{\infty}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. D. P. Meldrum. Near-Rings and Their Links with Groups. Marshfield, MA: Pitman, 1985. [2] G. Pilz. Near-Rings. Amsterdam: North-Holland, 1983.