Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, А. Н. Типко, З. С. Чекашкина, Регуляризованные следы унитарных операторов, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:43:26

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. ДУБРОВСКИЙ, А. Н. ТИПКО, З. С. ЧЕКАШКИНА

В этой работе, используя преобразование Кэли самосопряженных операторов (см. [1]), будет вычислен регуляризованный след унитарного оператора. Наш результат не следует из статьи М. Г. Крейна [2].

Пусть V_i – унитарные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H со спектром, состоящим из собственных значений β_n^i конечной кратности, сходящихся к точке 1, причем выполнено условие Кэли: множество всех векторов $V_i h - h$, $h \in H$, плотно в H , $i = 1, 2$.

Введем самосопряженные операторы A_i , $i = 1, 2$, с помощью обратного оператора к преобразованию Кэли: $A_i = (zE - \bar{z}V_i)(1 - V_i)^{-1}$. Предположим, что оператор A_1 имеет ядерную резольвенту или, что то же самое:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n^1 - 1| < \infty, \quad (1)$$

где β_n^i – собственные числа оператора V_i , занумерованные согласно формуле

$$\lambda_n^i = (zE - \beta_n^i)(1 - \beta_n^i)^{-1},$$

причем собственные числа λ_n^i оператора A_i занумерованы целыми числами в порядке возрастания величин с учетом кратности и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^i = \pm\infty$, $i = 1, 2$ (операторы A_i могут быть полуограниченными). Будем дополнительно предполагать, что оператор

$$A_2 - A_1 = (zE - \bar{z}V_2)(1 - V_2)^{-1} - (zE - \bar{z}V_1)(1 - V_1)^{-1} \quad (2)$$

продолжается по непрерывности до ограниченного, всюду определенного оператора в H ; очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \beta_n^i = 1$, $i = 1, 2$.

По лемме из [3] существуют две последовательности положительных чисел $\{a_m^+\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{a_m^-\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n^1 - a_m^+|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{-n}^1 + a_m^-|} \right\} = 0. \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-k_m}^{n_m} (\beta_n^2 - \beta_n^1) &= -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma_m} \frac{\lambda - z}{\lambda - \bar{z}} ((A_2 - \lambda E)^{-1} - (A_1 - \lambda E)^{-1}) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma_m} \frac{\lambda - z}{\lambda - \bar{z}} \sum_{t=1}^{\infty} ((A_1 - \lambda E)^{-1} [(A_2 - A_1)(A_1 - \lambda E)^{-1}]^t) d\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Γ_m – конечный замкнутый регулярный контур, содержащий на вещественной оси внутри себя только отрезок $[-a_m^-, a_m^+]$ и отстоящий от вещественной оси на расстоянии не меньше чем $d_m = \min_{t=0, \infty} \{|\lambda_t^1 - a_m^+|, |\lambda_{-t}^1 + a_m^-|\}$. Целые числа $(-k_m, n_m)$ суть номера ближайших на отрезке $[-a_m^-, a_m^+]$ собственных чисел оператора A_1 от чисел $-a_m^-$, a_m^+ соответственно.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Из (3) следует, что $d_m > \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Оценим в ядерной норме на вертикальных прямых $\operatorname{Re} \lambda = -a_m^-$ и $\operatorname{Re} \lambda = a_m^+$ выражение $S(\lambda) = \sum_{t=2}^{\infty} (A_1 - \lambda E)^{-1} [(A_2 - A_1)(A_1 - \lambda E)^{-1}]^t$:

$$\|S(\lambda)\|_1 \leq \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n^1 - a_m^+|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{-n}^1 + a_m^-|} \right\} * \frac{(\|A_2 - A_1\|(d_m + |\rho|)^{-1})^2}{1 - \|A_2 - A_1\|(d_m + |\rho|)^{-1}},$$

где $\rho = \operatorname{Im} \lambda$. Тогда

$$\operatorname{Sp} \int_{\Gamma_m} \frac{\lambda - z}{\lambda - \bar{z}} S(\lambda) d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

С помощью теории вычетов вычислим слагаемые в (4):

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\beta_n^2 - \beta_n^1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left([(zE - \bar{z}V_2)(1 - V_2)^{-1}f_n, f_n] \right. \\ &\quad \left. - ((zE - \bar{z}V_1)(1 - V_1)^{-1}f_n, f_n) \right] \frac{-2 \operatorname{Im} z(1 - \beta_n^1)^2}{(2 \operatorname{Im} z - \beta_n^1(\bar{z} + 1))^2} \Big) \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2 \operatorname{Im} z(1 - z)(\beta_n^1 - \beta_n^2)}{(2 \operatorname{Im} z + \beta_n^1(\bar{z} - 1))(2 \operatorname{Im} z + \beta_n^2(\bar{z} - 1))}. \end{aligned}$$

Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА. Если V_i – унитарные операторы со спектром, состоящим из собственных чисел конечной кратности, сходящихся к 1, удовлетворяющие условию Кэли, ограничению (1), и оператор (2) ограничен, то верно соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\beta_n^2 - \beta_n^1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left([(zE - \bar{z}V_2)(1 - V_2)^{-1}f_n, f_n] \right. \\ &\quad \left. - ((zE - \bar{z}V_1)(1 - V_1)^{-1}f_n, f_n) \right] \frac{-2 \operatorname{Im} z(1 - \beta_n^1)^2}{(2 \operatorname{Im} z - \beta_n^1(\bar{z} + 1))^2} \Big) \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2 \operatorname{Im} z(1 - z)(\beta_n^1 - \beta_n^2)}{(2 \operatorname{Im} z + \beta_n^1(\bar{z} - 1))(2 \operatorname{Im} z + \beta_n^2(\bar{z} - 1))}, \end{aligned}$$

где все ряды сходятся абсолютно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Этим методом можно вычислить регуляризованные следы всех натуральных порядков унитарного оператора V_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. [2] М. Г. Крейн // J. Operator Theory. 1987. Т. 17. С. 129–187. [3] В. А. Садовничий, В. А. Конягин, С. В. Подольский // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 1. С. 26–28.

Магнитогорский государственный университет

Принято редколлегией
24.09.2001