Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Контрпример к одной гипотезе о гладком отображении, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 135–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm46>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:44:30

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КОНТРПРИМЕР К ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ
О ГЛАДКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В. Е. СЛЮСАРЧУК

В конечномерном банаховом пространстве E рассмотрим выпуклый компакт X . Пусть $T: X \rightarrow X$ — непрерывно дифференцируемое отображение, $T'(x)$ — производная отображения T в точке $x \in X$ и $\rho(T'(x))$ — спектральный радиус оператора $T'(x)$.

В монографии [1, с. 35] выдвинута

ГИПОТЕЗА. Если $\max_{x \in X} \rho(T'(x)) < 1$, то неподвижная точка отображения T единственна и итерационный процесс $x_{k+1} = Tx_k$ ($k = 0, 1, \dots$) сходится к ней при любом $x_0 \in X$.

Приведем пример, опровергающий эту гипотезу.

В качестве E возьмем пространство матриц-столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$) с нормой $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим нильпотентные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что

$$(1) \quad \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\alpha A + (1 - \alpha)B) = \frac{1}{2}.$$

Определим отображение $T: E \rightarrow E$ равенством $T(x) = C(x)x$, в котором

$$C(x) = \begin{cases} \mu^{1/2} u(x)B, & \text{если } \|x\| < \mu^m, \\ \mu^{1/2} u^2(x)(v(x)A + w(x)B), & \text{если } \mu^m \leq \|x\| \leq 2\mu^m, \\ 0, & \text{если } \|x\| > 2\mu^m, \end{cases}$$

где $u(x) = \sin^2 \frac{\pi \|x\|}{2\mu^m}$, $v(x) = \sin^2 \frac{\pi \ln \|x\|}{\ln \mu}$, $w(x) = \cos^2 \frac{\pi \ln \|x\|}{\ln \mu}$, $m \in \mathbb{N}$, и μ — такое число из интервала $(1, 4)$, что

$$(2) \quad \mu \sin^4 \frac{\pi \mu^{1/2}}{2} = 1.$$

Это отображение, очевидно, является C^1 -отображением.

Из (1) следует, что $\max_{x \in E} \rho(C(x)) = \mu^{1/2}/2 < 1$ для каждого $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\gamma \in \left(\frac{\mu^{1/2}}{2}, 1\right)$. Поскольку множество $\{C(x) : x \in E\}$ компактно, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что если для матрицы M и некоторого $x \in E$ выполняется неравенство $\|M - C(x)\| \leq \varepsilon$, то $\rho(M) \leq \gamma$.

Из определения T следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \|C(x) - T'(x)\| = 0.$$

Поэтому

$$(3) \quad \max_{x \in E} \rho(T'(x)) \leq \gamma$$

для достаточно большого m .

Предположим, что соотношение (3) выполняется при $m = m_0$.

Рассмотрим выпуклый компакт $X = \{x \in E : \|x\| \leq 4\mu^{m_0}\}$. Тогда $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — неподвижная и притягивающая точка отображения T , принадлежащая X , и итерационный процесс $x_{k+1} = Tx_k$ ($k = 0, 1, \dots$) сходится к 0 не для каждого $x_0 \in X$. Если

$$x_0 = \mu^{m_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то

$$x_1 = \mu^{m_0 + \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и согласно (2)

$$x_2 = x_0,$$

т.е. $\{x_0, x_1\}$ — цикл отображения $T: X \rightarrow X$. Поэтому последовательность $x_{k+1} = Tx_k$ ($k = 0, 1, \dots$) нефундаментальна, если

$$x_0 \in \left\{ \mu^{m_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu^{m_0 + \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Следовательно, приведенный пример опровергает рассмотренную гипотезу.

В заключение заметим, что рассмотренная гипотеза верна в случае выполнения такого дополнительного условия — величина

$$\max_{x \in X} \|T'(T(x)) - T'(x)\|$$

является достаточно малой (см. теорему 1 [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белицкий Г. Р., Любич Ю. И. Нормы матрицы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1984. [2] Слюсарчук В. Е. // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49. № 7. С. 970–980.

Украинская государственная академия водного хозяйства

Принято редколлегией
22.01.1998