Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Об иррациональности $\zeta_q(2)$, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:02:27

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ $\zeta_q(2)$

В. В. Зудилин

Для комплексного q , $|q| < 1$, определим величину

$$\zeta_q(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)q^n, \quad \lim_{\substack{q \rightarrow 1 \\ |q| < 1}} (1-q)^2 \zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

где $\sigma(n)$ – сумма делителей натурального числа n .

ТЕОРЕМА 1. При $q = 1/p$, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(2)$ иррационально и показатель иррациональности удовлетворяет неравенству $\mu(\zeta_q(2)) \leq 4.07869374 \dots$.

Напомним, что показатель иррациональности $\mu(\alpha)$ числа $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ определяется как точная верхняя грань чисел $\mu \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|\alpha - a/b| \leq |b|^{-\mu}$ имеет конечное число решений в $a, b \in \mathbb{Z}$, при этом $\mu(\alpha) \geq 2$ согласно теореме Дирихле; в случае $\mu(\alpha) < +\infty$ говорят, что α – *лиувиллево число*. Теорема Нестеренко [1] влечет трансцендентность $\zeta_q(2)$ для любого $q \in \mathbb{Q}$, $0 < |q| < 1$, однако из общих оценок для меры трансцендентности [2] не следует лиувиллевость этого числа.

Мы будем пользоваться стандартными q -обозначениями [3]:

$$(T; q)_n := \prod_{k=1}^n (1 - q^{k-1}T), \quad \Gamma_q(t) := \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^t; q)_{\infty}} (1 - q)^{1-t}, \quad [n]_q! := \Gamma_q(n+1) = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n}.$$

Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ определим набор $a_j = \alpha_j n + 1$, $j = 1, 2, 3$, $b_1 = \beta_1 n + 1$, $b_k = \beta_k n + 2$, $k = 2, 3$, где целочисленные параметры (*направления*) α_j и β_1, β_k удовлетворяют условиям $\beta_1 = 0 \leq \alpha_j \leq \beta_k$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. Рассмотрим q -базисный гипергеометрический ряд [3]

$$H_n(q) := \frac{[b_2 - a_2 - 1]_q! [b_3 - a_3 - 1]_q!}{(1 - q)^2 [a_1 - b_1]_q!} \sum_{t=0}^{\infty} R(q; t) q^t, \quad (1)$$

$$\text{где } R(q; t) = \frac{\Gamma_q(t + a_1) \Gamma_q(t + a_2) \Gamma_q(t + a_3)}{\Gamma_q(t + b_1) \Gamma_q(t + b_2) \Gamma_q(t + b_3)} \cdot q^{t(b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3 - 1)}.$$

Записывая разложение $R(q; t)$ как рациональной функции от $T = q^t$ в сумму простейших дробей и производя суммирование в (1), мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1. Имеет место равенство $H_n(q) = A_n(q) \zeta_q(2) - B_n(q)$, где $A_n(q)$ и $B_n(q)$ – рациональные функции параметра q .

Явные формулы для коэффициента $A_n(q)$ и тривиальные оценки для ряда в правой части (1) приводят нас к следующему результату.

ЛЕММА 2. Для любого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, справедливы предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(q)|}{n^2 \log |p|} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_n(q)|}{n^2 \log |p|} \leq \beta_2 \beta_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2} =: C_1.$$

Для вычисления знаменателей рациональных функций $A_n(q), B_n(q)$ так же, как и в [4], [5] для линейных приближений к $\zeta(2)$, применяется группа $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{10}$ перестановок 10-элементного множества

$$c_{00} = (\beta_2 + \beta_3) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad c_{jk} = \begin{cases} \alpha_j - \beta_k & \text{для } k = 1, \\ \beta_k - \alpha_j & \text{для } k = 2, 3, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, 3; \quad (2)$$

эта группа содержит 120 перестановок и величина

$$\frac{H_n(q)}{[c_{00}n]_q! [c_{21}n]_q! [c_{22}n]_q! [c_{33}n]_q! [c_{31}n]_q!}$$

инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{S}$; кроме того, сама величина $H_n(q)$ инвариантна относительно действия подгруппы $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$ порядка 10. Положим

$$M := \max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{S}_0} \{\widetilde{M}(\mathbf{g}\mathbf{c})\}, \quad \widetilde{M}(\mathbf{c}) := \begin{cases} c_{00}c_{21} + c_{31}c_{33} - c_{21}c_{33}, & \text{если } c_{21} \leq c_{31}, \\ c_{00}c_{31} + c_{21}c_{22} - c_{31}c_{22}, & \text{если } c_{21} \geq c_{31}, \end{cases}$$

$$\omega(z) := \max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{S}} \{\widetilde{\omega}(\mathbf{c}; z) - \widetilde{\omega}(\mathbf{g}\mathbf{c}; z)\}, \quad \widetilde{\omega}(\mathbf{c}; z) := \lfloor c_{00}z \rfloor + \lfloor c_{21}z \rfloor + \lfloor c_{22}z \rfloor + \lfloor c_{33}z \rfloor + \lfloor c_{31}z \rfloor,$$

где через $\mathbf{g}\mathbf{c}$ обозначается действие соответствующей перестановки $\mathbf{g}$ на множестве (2), а через $\lfloor \cdot \rfloor$ целая часть числа; функция $\omega(z)$ принимает целые неотрицательные значения и является 1-периодической. Пусть также $m_1 \geq m_2$ — два максимальных элемента, стоящих на разных местах в наборе $\mathbf{c}$. *Круговые многочлены* $\Phi_l(x)$ и только они участвуют в разложении $(x; x)_n$ на неприводимые множители (см., например, [6], [7]), а многочлен $D_n(x) := \prod_{l=1}^n \Phi_l(x)$ является наименьшим общим кратным $x-1, x^2-1, \dots, x^n-1$. В этих обозначениях имеет место

ЛЕММА 3. Пусть $\Pi_n(p) := p^{-Mn^2} \cdot D_{m_1n}(p)D_{m_2n}(p) \cdot \prod_{l=1}^{m_1n} \Phi_l(p)^{-\omega(n/l)}$, где $p = q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Тогда для коэффициентов линейной формы $H_n(q)$ справедливы включения $\Pi_n(p)A_n(q), \Pi_n(p)B_n(q) \in \mathbb{Z}$.

Для изучения асимптотики величины $\Pi_n(p)$ при $n \rightarrow \infty$ мы применяем соответствующий результат из [6] об асимптотике $D_n(p)$ и q -аналог арифметической схемы Чудновского–Рухадзе–Хаты.

ЛЕММА 4. Справедливо предельное соотношение

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\Pi_n(p)|}{n^2 \log |p|} = M - \frac{3}{\pi^2} \left(m_1^2 + m_2^2 + \int_0^1 \omega(z) d\psi'(z) \right) =: C_0,$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Если $C_0 > 0$, то число $\zeta_q(2)$ иррационально для любого $q = 1/p, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, и справедлива оценка $\mu(\zeta_q(2)) \leq C_1/C_0$ для показателя иррациональности. Выбор $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 7, \beta_2 = 14, \beta_3 = 15$ приводит к $C_0 = 38.00236293 \dots$ и $C_1 = 155$, откуда следует требуемая оценка теоремы 1.

q -арифметическая схема и q -гипергеометрическая конструкция приближающих линейных форм позволяет также уточнить меры иррациональности (см. [6] и [7]) для величин

$$\zeta_q(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n}, \quad \ln_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^n}{1-q^n}, \quad |q| < 1, \quad (3)$$

являющихся q -аналогами (расходящегося) гармонического ряда и $\log 2$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2. При $q = 1/p, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, показатели иррациональности чисел (3) удовлетворяют неравенствам $\mu(\zeta_q(1)) \leq 2.49846482 \dots, \mu(\ln_q(2)) \leq 3.29727451 \dots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Нестеренко // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 9. С. 65–96. [2] Ю. В. Нестеренко // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 299–334. [3] Г. Гаспер, М. Рахман. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993. [4] G. Rhin, C. Viola // Acta Arith. 1996. V. 77. № 1. P. 23–56. [5] W. Zudilin. Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // Manuscript, 2001 (submitted for publication). [6] P. Bundschuh, K. Väänänen // Compositio Math. 1994. V. 91. P. 175–199. [7] W. Van Assche // The Ramanujan J. 2001. V. 5. № 3. P. 295–310.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Принято редколлегией
24.10.2001