Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Климов, Симплектические многообразия, определяемые подгруппами группы струй диффеоморфизмов вещественной плоскости, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:08:04

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОДГРУППАМИ ГРУППЫ СТРУЙ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

С. В. Климов

Рассмотрим пространство $P_{n,m}$ полиномиальных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя, задаваемых вектором полиномов $p(t) = (p^{(1)}(t), p^{(2)}(t), \dots, p^{(n)}(t))$ вида

$$p^{(i)}(t) = t_i + \sum_{j_1 + \dots + j_n \leq m} x_{j_1, \dots, j_n}^{(i)} t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n}.$$

Общее количество коэффициентов в отображении $p(t) \in P_{n,m}$ равно $N = N(n, m) = n(C_{n+m}^n - n - 1)$. Положим $p(t) = p_x(t) = p_x$, где $x \in \mathbb{R}^N$ – набор коэффициентов отображения p_x . Тогда если $p_x, p_y \in P_{n,m}$, то m -струя их композиции $p_y(p_x)$ является полиномиальным отображением того же вида. Следовательно, определена групповая операция $*$: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$: $z = x * y$, где $p_z = p_y(p_x)$. Пусть $\Gamma_N \subset \mathbb{R}^N$ – стандартная целочисленная решетка. Тогда факторпространство относительно правых сдвигов $M^N = \mathbb{R}^N / \Gamma_N$ является замкнутым компактным N -мерным многообразием. Многообразия M^N были введены в [1], где показано, что при $n = 1$ они дают дифференциально-геометрическую реализацию важной серии симплектических нильмногообразий из [2]. Симплектическая структура на M^N при $n = 1$ была задана в [1] при помощи формы кривизны связности расслоения $M^{N+1} \rightarrow M^N$.

Основной целью настоящей работы является построение серий симплектических нильмногообразий, являющихся подмногообразиями многообразий M^N , которые, как оказалось, при $n \geq 2, m \geq 3$ не являются симплектическими.

Рассмотрим в M^N следующие подмногообразия. Пусть $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ – набор множеств нижних индексов $(j_1, \dots, j_n)$. Рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{P}_{n,m}$ группы $P_{n,m}$ подпространство $\mathfrak{P}_{n,m}(A)$, линейно порожденное векторами $\xi_{j_1, \dots, j_n}^{(k)}, (j_1, \dots, j_n) \in A^{(k)}, k = 1, \dots, n$, где $\{\xi_{j_1, \dots, j_n}^{(k)}\}$ – канонический базис алгебры Ли левинвариантных векторных полей на $P_{n,m}$. Мы будем рассматривать те наборы A , для которых подпространства $\mathfrak{P}_{n,m}(A)$ являются подалгебрами в $\mathfrak{P}_{n,m}$. Соответствующие им подгруппы в $P_{n,m}$ определяют многообразия $M(A)$.

Скажем, что многообразия $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_t), \dots$ образуют серию, если они соответствуют сколь угодно длинной цепочке множеств $A_1 \subset \dots \subset A_t \subset \dots$, при этом каждому A_i соответствует подалгебра $\mathfrak{P}_{n,m_i}(A)$ в $\mathfrak{P}_{n,m_i}$ для некоторого m_i .

Назовем серии, соответствующие цепочкам $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ и $\hat{A}_1 \subset \hat{A}_2 \subset \dots$, эквивалентными, если найдутся такие s, t , что для всех $i \geq 1$ существует изоморфизм касательных алгебр $\phi_i: \mathfrak{P}_{n,m_{s+i}}(A_{s+i} \setminus A_s) \rightarrow \mathfrak{P}_{n,m_{t+i}}(\hat{A}_{t+i} \setminus \hat{A}_t)$.

Назовем типом многообразия $M(A)$ вектор $(a_1, \dots, a_{m-1})$, где a_i – количество мультииндексов $(j_1, \dots, j_n)$ в A таких, что $j_1 + \dots + j_n = i + 1$. Пусть в типе $M(A)$ ненулевыми компонентами являются $a_{i_1}, \dots, a_{i_t}, i_1 \leq \dots \leq i_t$. Обозначим через N_1 количество мультииндексов $(j_1, \dots, j_n)$ в A таких, что $d\omega_{j_1, \dots, j_n}^{(l)} = 0$, а через $N_k, k = 2, \dots, t$, – таких, что $j_1 + \dots + j_n = i_k + 1, (j_1, \dots, j_n) \in A^{(l)}$ и $d\omega_{j_1, \dots, j_n}^{(l)} \neq 0$. Здесь $\omega_{j_1, \dots, j_n}^{(l)}$ – каноническая базисная левинвариантная форма на алгебре Ли $\mathfrak{M}(A)$.

ЛЕММА 1. Для симплектического многообразия $M(A)$ выполнены следующие неравенства:

$$N_1 \geq N_t, \quad N_1 + N_2 \geq N_t + N_{t-1}, \quad \dots, \quad N_1 + \dots + N_{[t/2]} \geq N_t + \dots + N_{t-[t/2]+1}.$$

ТЕОРЕМА 2. При $n \geq 2$ и $t \geq 3$ на многообразии M^N не существует симплектической формы.

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 1, так как для многообразий M^N , как легко видеть, $N_1 = 6$, $N_i = 2(i+2)$, $i \geq 2$.

Введем следующие множества индексов $A_t = A^{(1)} \cup A^{(2)}$ и соответствующие им 2-формы. Во всех случаях $j = 1, 2, \dots, t$; $k \in \mathbb{N}$ фиксировано.

- 1) $A^{(1)} = \{(1, jk), (i, jk - i + 1)\}$, $A^{(2)} = \emptyset$; $d\omega_{i, (t+s+1)k-i+1}^{(1)}$.
 - 2) $t - s$ чётно.
 $A^{(1)} = \{(2, jk - 1), (0, jk + 1)\}_{j \equiv 1 \pmod 2} \cup \{(1, jk)\}_{j \equiv 0 \pmod 2}$, $A^{(2)} = \{(0, jk + 1)\}_{j \equiv 0 \pmod 2}$;
 $d\omega_{1, (t+s+1)k}^{(1)}$.
 - 3) $A^{(1)} = \{(j(i-1) + 1, j(k+1-i))\}$, $A^{(2)} = \{(j(i-1), j(k+1-i) + 1)\}$;
 $d\omega_{(t+s+1)(i-1)+1, (t+s+1)(k+1-i)}^{(1)}$.
 - 4) $A^{(1)} = \{(i, jk + 1 - i)\}_{j \equiv 0 \pmod p} \cup \{(i, jk + 1 - i), (1, jk)\}_{j \not\equiv 0 \pmod p}$,
 $A^{(2)} = \{(0, jk + 1)\}_{j \equiv 0 \pmod p}$ (p фиксировано); $d\omega_{i, (t+s+1)k-i+1}^{(1)}$.
- Далее везде $t - s$ нечётно.
- 5) $A^{(1)} = \{(i, (j-1)k/2 + l - i + 1)\}_{j \equiv 1 \pmod 2} \cup \{(1, jk/2)\}_{j \equiv 0 \pmod 2}$, $A^{(2)} = \emptyset$;
 $d\omega_{i, (t+s)k/2+l-i+1}^{(1)}$ (l фиксировано, $1 \leq l \leq k-1$).
 - 6) $A^{(1)} = \{(i, (j-1)k/2 + l - i + 1)\}_{j \equiv 1 \pmod 2} \cup \{(1, jk/2)\}_{j \equiv 0 \pmod 2, j \not\equiv 0 \pmod{2p}}$,
 $A^{(2)} = \{(0, jk/2 + 1)\}_{j \equiv 0 \pmod{2p}}$ (p и l фиксированы, $1 \leq l \leq k-1$); $d\omega_{i, (t+s)k/2+l-i+1}^{(1)}$.
 - 7) $A^{(1)} = \{(j(i-1) + 1, j(k-i+1))\}$, $A^{(2)} = \emptyset$; $d\omega_{(t+s+1)(i-1)+1, (t+s+1)(k+1-i)}^{(1)}$.
- Положим $A_0 = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3. 1) При $n = 2$ нильмногообразия $M(A_t \setminus A_s)$, $s = 0, 1, \dots, t-1$, соответствующие приведенным выше множествам индексов, являются симплектическими и образуют серию; приведенные выше формы вида $d\omega_{p,q}^{(r)}$ являются симплектическими формами на $M(A_t \setminus A_s)$ и представляют собой формы кривизны связности расслоений

$$M(A_t^{(r)} \setminus A_s^{(r)} \cup (p, q), A_t^{(3-r)} \setminus A_s^{(3-r)}) \rightarrow M(A_t \setminus A_s),$$

при этом $(p, q) \in A_{s+t+1}^{(r)}$.

2) При $n = 2$ каждая нетривиальная серия симплектических нильмногообразий вида $M(A)$ эквивалентна одной из приведенных выше.

Автор выражает благодарность В.М. Бухштаберу за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 161–162. [2] I. K. Babenko, I. A. Taimanov. On nonformal simply connected symplectic manifolds // SFB 288, Preprint 358, 1998.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.09.2001