Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева, Критерий квазиинвариантности пуассоновских мер относительно “линейных” трансформаций пространства, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:07:32

**КРИТЕРИЙ КВАЗИИНВАРИАНТНОСТИ
ПУАССОНОВСКИХ МЕР ОТНОСИТЕЛЬНО
“ЛИНЕЙНЫХ” ТРАНСФОРМАЦИЙ ПРОСТРАНСТВА**

М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева

Пусть $(X, \mathcal{F}, \nu)$ – произвольное измеримое пространство, где ν – конечная неатомическая мера. Рассмотрим продукт-пространство $X \times \mathbb{R}^+$ с σ -алгеброй $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ и мерой $\nu \times \Lambda$, где $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра на $\mathbb{R}^+$, а Λ – произвольная мера на $\mathbb{R}^+$. Исследуемая задача состоит в том, чтобы найти условия, описывающие распределения всех пуассоновских мер со спектральными мерами вида $\nu \times \Lambda$, квазиинвариантные относительно достаточно широкой группы растяжений пространства $X \times \mathbb{R}^+$ по одномерной компоненте. Уточним, какой класс преобразований нас интересует. Для этого введем обозначение для пространства целочисленных мер на $X \times \mathbb{R}^+$ $\mathcal{M} = \{\eta : \forall A \in \mathcal{F} \times \mathcal{B} \ \eta(A) \in \mathbb{Z}^+\}$, а также для множества неотрицательных измеримых функций на пространстве X с ν -суммируемым логарифмом

$$\Phi = \left\{ a : X \rightarrow \mathbb{R}^+ : \int_X |\ln a(x)| d\nu(x) < \infty \right\}.$$

Далее, каждой функции $a \in \Phi$ сопоставим преобразование $\mathcal{L}^a : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X \times \mathbb{R}^+$, которое действует на $(x, r) \in X \times \mathbb{R}^+$ так: $\mathcal{L}^a(x, r) = (x, a(x)r)$. При этом в пространстве мер определим преобразование $\mathcal{L}_a : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, которое каждой мере $\phi \in \mathcal{M}$ сопоставляет $\mathcal{L}_a \phi(B) = \phi((\mathcal{L}^a)^{-1}(B))$, где $B \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}$. Множество $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$ является группой “линейных” трансформаций пространства $\mathcal{M}$. Квази-инвариантность распределений пуассоновских мер относительно этой группы преобразований и будет нас интересовать в дальнейшем. Об этой задаче впервые упоминалось в работах А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева [1] и [2] в связи с представлениями группы ограниченных измеримых функций на многообразии с гладкой мерой со значениями в $SL(2, \mathbb{R})$, позднее – в ряде работ А. М. Вершика, Н. В. Цилевич и М. Йора [3], [4], в которых исследуются свойства гамма-процесса и мер Пуассона–Дирихле в контексте теории представлений. Следующая теорема содержит искомый критерий квазиинвариантности.

ТЕОРЕМА. *Пуассоновская мера является квазиинвариантной относительно всех преобразований $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \Phi}$ тогда и только тогда, когда ее спектральная мера представима в виде*

$$dm(x, r) = d\nu(x) \cdot \frac{\psi^2(\ln r)}{r} dr,$$

где функция ψ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\psi(s)$ строго положительна при почти всех $s \in \mathbb{R}$;
- 2) при некотором $c > 0$

$$\int_{|v|>r} |\widehat{\psi}(v)|^2 dv \leq c(1 + 1/r) \quad \forall r > 0,$$

где $\widehat{\psi}$ – преобразование Фурье функции ψ .

Проиллюстрируем эту теорему несколькими примерами. А. М. Вершик с соавторами рассматривал гамма-меру, квазиинвариантность которой была ими установлена с использованием преобразования Лапласа мер, возникающих при трансформациях пространства (см. [3], [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гамма-мерой называется закон распределения в пространстве $\mathcal{M}$ случайной пуассоновской меры на пространстве $X \times \mathbb{R}^+$ со спектральной мерой

$$dm(x, r) = d\nu(x) \cdot \frac{e^{-r}}{r} dr.$$

До сих пор не было известно, есть ли в классе распределений пуассоновских мер, сосредоточенных на множестве $\{\mu \in \mathcal{M} : \mu((0, \varepsilon) \times \mathcal{X}) = \infty\}$ (ε — любое сколь угодно малое положительное число)¹, квазиинвариантные меры, сингулярные относительно гамма-меры. Теорема позволяет доказать квазиинвариантность распределений пуассоновских мер со спектральными плотностями вида

$$\phi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{r|\ln r|^\alpha}, & r \in (0, \varepsilon), \\ g(r), & r \in [\varepsilon, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

где $\varepsilon < 1$, $\alpha \in [0, 1]$, а g — любая строго положительная суммируемая на $[\varepsilon, \infty)$ функция. В этом семействе при $\alpha = 0$ получается мера, эквивалентная гамма-мере. Во всех остальных случаях меры сингулярны относительно гамма-меры, что и подтверждает неединственность гамма-меры в классе рассматриваемых мер. Условия теоремы выполнены и для класса мер, задаваемого спектральными мерами вида $d\nu(x) \cdot \frac{\psi^2(\ln r)}{r} dr$, где $\psi(v) \in \Psi$ при $v \in (-\infty, \ln \varepsilon)$ и ψ — любая строго положительная квадратично суммируемая на интервале $[\ln \varepsilon, \infty)$. Здесь $\varepsilon < 1$ и

$$\Psi = \left\{ \varphi \in W_1^1(-\infty, \ln \varepsilon) : |\varphi'(v)| \leq \frac{c}{|v|} \text{ и } 0 < \varphi(v) < c_0, \ c_0, c > 0 \right\}.$$

Этот класс включает в себя и гамма-меру, и все меры со спектральными плотностями вида (1). Рассмотрим функции из Ψ , не имеющие предела при $v \rightarrow -\infty$, например, $\psi_1(v) = \cos \ln(|v|+1) + c$, где $c > 1$, $v \in (-\infty, 0)$, или кусочно линейную функцию

$$\psi_2(v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{2k}}v + 3, & v \in [-2^{2k+1}, -2^{2k}), \ k = 0, 1, \dots, \\ -\frac{1}{2^{2k-1}}v, & v \in [-2^{2k}, -2^{2k-1}), \ k = 1, 2, \dots, \\ -v + 1, & v \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Этим функциям соответствуют пуассоновские меры со спектральными плотностями, медленно меняющимися между плотностями гамма-мер разного масштаба, а значит, сингулярные относительно любой гамма-меры. Таким образом, предъявлен еще более широкий класс мер, квазиинвариантных относительно $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in \mathbb{F}}$, который содержит множество мер, сингулярных относительно гамма-меры. Теорема была нами доказана как частный случай критерия взаимной абсолютной непрерывности двух пуассоновских мер на произвольном измеримом пространстве. Столь общий случай уже был изучен А. В. Скороходом (см. [5]), но лишь для процессов с независимыми приращениями. Удобные для проверки условия абсолютной непрерывности однородных процессов с независимыми приращениями были предложены также в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik. Models of representations of current groups // Representations of Lie Groups and Lie Algebras / ed. A. A. Kirillov. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1985. P. 121–179. [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, А. М. Вершик // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17. № 2. С. 70–72. [3] N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1999. V. 329. P. 163–168. [4] N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor. Distinguished properties of the gamma process and related topics // Prepublication № 575 du Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires. 2000. [5] А. В. Скороход. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964. [6] C. M. Newman // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 268–272.

Санкт-Петербургский государственный университет

Принято редколлегией
24.09.2001

¹т.е. соответствующая пуассоновская мера имеет бесконечное число нагрузок в любой полосе около нуля.