Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Согласованные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова и производная Ли, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:51:09

СОГЛАСОВАННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ ДУБРОВИНА–НОВИКОВА И ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ

О. И. Мохов

В данной заметке мы доказываем, что локальный гамильтонов оператор гидродинамического типа K_1^{ij} тогда и только тогда согласован с невырожденным локальным гамильтоновым оператором гидродинамического типа K_2^{ij} , когда локально оператор K_1^{ij} является производной Ли оператора K_2^{ij} вдоль векторного поля в соответствующей области.

Напомним, что оператор $K^{ij}[u(x)]$ называется гамильтоновым, если он определяет скобку Пуассона (кососимметричную и удовлетворяющую тождеству Якоби)

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \quad (1)$$

для произвольных функционалов $I[u(x)]$ и $J[u(x)]$ на пространстве функций (полей) $u(x) = \{u^i(x), 1 \leq i \leq N\}$, где $u^1, \dots, u^N$ – локальные координаты на некотором заданном гладком N -мерном многообразии M . Очевидно, что любой гамильтонов оператор всегда ведет себя как контравариантное двухвалентное операторное тензорное поле относительно произвольных локальных замен координат $u^i = u^i(v^1, \dots, v^N)$, $1 \leq i \leq N$, на многообразии M :

$$\tilde{K}^{sr}[v(x)] = \frac{\partial v^s}{\partial u^i} K^{ij}[u(v(x))] \circ \frac{\partial v^r}{\partial u^j}, \quad (2)$$

где символ $\circ$ обозначает произведение операторов (важно отметить, что в отличие от обычных тензорных полей компоненты операторов в (2) перемножаются только в указанном порядке). Соответственно, к гамильтоновым операторам применимы классические тензорные конструкции, в частности, производная Ли вдоль векторного поля на многообразии M .

Пусть $K^{ij}[u(x)]$ – произвольный гамильтонов оператор, $\xi(u) = \{\xi^i(u), 1 \leq i \leq N\}$ – произвольное гладкое векторное поле на многообразии M . Производной Ли гамильтонова оператора $K^{ij}[u(x)]$ (как и любого контравариантного двухвалентного операторного тензорного поля типа (2)) вдоль векторного поля $\xi(u)$ называется оператор

$$(\mathcal{L}_\xi K)^{ij}[u(x)] = \left(\frac{d}{dt} \left[\left(\delta_s^i - t \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} \right) K^{sr}[u(x) + t\xi(u(x))] \circ \left(\delta_r^j - t \frac{\partial \xi^j}{\partial u^r} \right) \right] \right) \Big|_{t=0}, \quad (3)$$

который также всегда ведет себя как контравариантное двухвалентное операторное тензорное поле типа (2) на M . Гамильтонов оператор, задаваемый произвольным матричным однородным дифференциальным оператором первого порядка, т.е. вида

$$P^{ij}[u(x)] = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k, \quad (4)$$

называется локальным гамильтоновым оператором гидродинамического типа или гамильтоновым оператором Дубровина–Новикова [1]. Это определение не зависит от выбора локальных координат $u^1, \dots, u^N$ на многообразии M , так как из (2) следует, что вид оператора (4) инвариантен относительно локальных замен координат на M . Оператор (4) называется невырожденным, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$. Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то оператор (4) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда 1) $g^{ij}(u)$ – произвольная плоская контравариантная псевдориманова метрика (метрика нулевой римановой кривизны), 2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – связность Леви-Чивита, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (теорема Дубровина–Новикова [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00010) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

Для производной Ли гамильтонова оператора гидродинамического типа $P^{ij}[u(x)]$ вдоль векторного поля $\xi(u)$ получаем:

$$(\mathcal{L}_\xi P)^{ij}[u(x)] = \left(\xi^s \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^s} - g^{sj} \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} - g^{is} \frac{\partial \xi^j}{\partial u^s} \right) \frac{d}{dx} + \left(\xi^s \frac{\partial b_k^{ij}}{\partial u^s} - b_k^{sj} \frac{\partial \xi^i}{\partial u^s} - b_k^{is} \frac{\partial \xi^j}{\partial u^s} + b_s^{ij} \frac{\partial \xi^s}{\partial u^k} - g^{is} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial u^s \partial u^k} \right) u_x^k. \quad (5)$$

Гамильтоновы операторы называются согласованными, если любая их линейная комбинация является гамильтоновым оператором (Магри, [2]; см. также [3]).

ТЕОРЕМА. *Гамильтонов оператор Дубровина–Новикова P_1^{ij} согласован с невырожденным гамильтоновым оператором Дубровина–Новикова P_2^{ij} тогда и только тогда, когда локально существует векторное поле $\xi(u)$ такое, что $P_1^{ij} = (\mathcal{L}_\xi P_2)^{ij}$.*

В другом виде, не связанном с производной Ли, общие условия согласованности гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова указаны в [4]–[7].

ВОПРОС. Всегда ли такое гладкое векторное поле существует глобально на плоском многообразии M , на пространстве петель которого глобально определены соответствующие согласованные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова P_1^{ij} и P_2^{ij} ? Если не всегда, то необходимо исследовать соответствующие дифференциально-геометрические и топологические препятствия, а также выделить и изучить все такие плоские многообразия, на которых существует глобально такое векторное поле. В частности, интересно изучить все такие векторные поля в $\mathbb{R}^N$ или $\mathbb{R}^{k, N-k}$, а также в областях этих пространств, — они порождают интегрируемые системы гидродинамического типа.

Отметим, что в теории гамильтоновых операторов имеет место следующий общий факт (см. [3]), представляющий интерес для приложений: если вторая группа когомологий соответствующего комплекса формального вариационного исчисления равна нулю, то из согласованности двух гамильтоновых операторов K_1^{ij} и K_2^{ij} , где K_2^{ij} — обратимый оператор, следует, что существует формальное векторное поле $X[u(x)]$, зависящее, вообще говоря, произвольным и нелокальным образом от полей $u(x)$ и их производных, такое, что $K_1 = L_X K_2$. Более того, если оператор K гамильтонов и, кроме того, оператор $L_X K$, где X — некоторое произвольное векторное поле, тоже гамильтонов, то гамильтоновы операторы K и $L_X K$ всегда согласованы. Если оператор K гамильтонов и, кроме того, $L_X^2 K = 0$, где X — некоторое векторное поле, то оператор $L_X K$ всегда гамильтонов, и, следовательно, гамильтоновы операторы K и $L_X K$ согласованы в этом случае. Важный специальный частный случай этой конструкции возник впоследствии в теории фробениусовых многообразий Дубровина (квазигомоморфные согласованные невырожденные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова) [4]. Исследование общих согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова этого класса, т.е. вида B^{ij} и $(L_X B)^{ij}$, таких, что $L_X^2 B = 0$, начато автором и Форди в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
 [2] F. Magri // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162. [3] I. Dorfman. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: Wiley, 1993. [4] B. Dubrovin // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018. [5] О. И. Мохов // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172. [6] О. И. Мохов // УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192. [7] О. И. Мохов // Труды МИ РАН. 1999. Т. 225. С. 284–300. [8] А. Р. Fordy, O. I. Mokhov // Phys. D. 2001. V. 152–153. № 1–4. P. 475–490.

Центр нелинейных исследований
 при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Принято редколлегией
 24.09.2001