Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Попов, Об одной конструкции модулей над кольцом многочленов, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:08:15

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦОМ МНОГОЧЛЕНОВ

О. Н. Попов

В статье [1] при исследовании кватернионно-дифференцируемых функций многих переменных возник следующий модуль над кольцом многочленов: $\mathcal{M}_n = R^4 / \langle A_n \rangle$, где A_n – матрица $U_1 | \dots | U_n$, $\langle A_n \rangle$ – подмодуль, порожденный ее столбцами,

$$U_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & t_i \\ -y_i & x_i & t_i & -z_i \\ -z_i & -t_i & x_i & y_i \\ -t_i & z_i & -y_i & x_i \end{pmatrix},$$

а $R = \mathbb{k}[\{x_i, y_i, z_i, t_i\}_{i=1}^n]$, $\mathbb{k}$ – поле.

Авторы показывали, что проективная размерность этого модуля равна $2n - 1$, и выводили отсюда некоторые утверждения о пучке кватернионно-дифференцируемых функций n переменных. Авторы вычисляли проективную размерность по формуле Ауслендера–Буксбаума, посредством явного (при помощи базисов Грёбнера) предъявления $\mathcal{M}_n$ -последовательности, а не построением резольвенты, так как этот путь они считали слишком сложным. В статье также была найдена размерность Крулля $\mathcal{M}_n$, для чего рассматривалось касательное пространство к носителю этого модуля в $\mathbb{C}^{4n} = \text{Spec } R$ для $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Таким образом была доказана коэн-маколеевость этого модуля, т.е. равенство размерности Крулля и глубины.

В статье [2] авторы продолжили исследования этого модуля с помощью базисов Грёбнера, найдя (градуированные) числа Бетти, ряд Гильберта и кратность $\mathcal{M}_n$.

В [1] матрица A_n получилась из системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, задающей кватернионно-дифференцируемые функции, транспонированием и заменой операторов частных производных по переменным на сами переменные. Однако можно заметить (ср. [2; введение]), что матрица U_i есть матрица левого умножения на $x_i - y_i i - z_i j - t_i k$ в базисе $1, i, j, k$. Такой взгляд на матрицу A_n позволил, как заметил Е. С. Голод, полностью понять структуру модуля $\mathcal{M}_n$, в частности, его проективной резольвенты. Комплексифицируем алгебру кватернионов. Так как при замене базиса в алгебре матрица U_i заменяется на сопряженную и в ней происходит линейная замена переменных, то структура модуля $\mathcal{M}_n$ от этого не изменится. Поэтому изоморфизм $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ – матричной алгебре – позволяет в базисе из матричных единиц придать матрице U_i вид

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & a_i & b_i \\ 0 & c_i & d_i \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}'_n \oplus \mathcal{M}'_n$, где $\mathcal{M}'_n$ – фактор R^2 по столбцам общей $2 \times 2n$ -матрицы. А про $\mathcal{M}'_n$ известно [3], что это – коэн-маколеев (СМ) модуль проективной размерности $2n - 2 + 1 = 2n - 1$ и что его минимальная резольвента – это комплекс Игона–Норкотта $([3; 2.C], \mathcal{O}_1(g))$. Это описание резольвенты позволяет упростить доказательства основных результатов статьи [2].

Отсюда возникло следующее обобщение этой задачи. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра с 1 над полем $\mathbb{k}$ с базисом $e_1, \dots, e_d$, а $\rho: A \rightarrow M_n(\mathbb{k})$ – ее матричное представление, отвечающее A -модулю M , $\dim_{\mathbb{k}} M = n$. Зададим натуральное l и рассмотрим кольцо многочленов $R = \mathbb{k}[x_{11}, \dots, x_{dl}]$ и модуль $F_l(M)$ над ним, являющийся фактормодулем свободного R -модуля R^n по подмодулю, порожденному столбцами матриц $\text{Id}_j = \sum_i \rho(e_i) x_{ij}$, $j = 1, \dots, l$. Мы исследуем вопрос о коэн-маколеевости и размерности модулей $F_l(M)$ и их аннуляторов. Автором получена

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01144).

ТЕОРЕМА 1. Пусть либо $l = 1$, либо $A = \bigoplus_i S_i \otimes_{Z(S_i)} K_i$, где S_i – простые алгебры над $\mathbb{k}$, $Z(S_i)$ – их центры, а K_i – конечномерные коммутативные алгебры над соответствующими $Z(S_i)$, и $\dim_{Z(S_i)} S_i = n_i^2$. Тогда

- 1) $F_l(\cdot)$ есть точный вполне строгий функтор из категории конечномерных A -модулей в категорию градуированных R -модулей и однородных гомоморфизмов степени 0;
- 2) если $l = 1$ или $n_i = n$ для всех i , то функтор $F_l(\cdot)$ переводит конечномерные A -модули в CM R -модули проективной размерности $(l-1)n+1$ (что равно 1 при $l = 1$);
- 3) при $l = 1$ для любого M аннулятор $F_l(M)$ – главный идеал.

По ходу доказательства получается некоторая информация о минимальной резольвенте модулей $F_l(M)$. А именно, для $l > 1$ теорему достаточно доказать для одного слагаемого и над алгебраически замыкнутым полем $\mathbb{k}$, т.е. для алгебры $M_n(K)$, где K – коммутативна. В этих условиях минимальную резольвенту модуля $F_l(M)$ можно строить функториально по M , обобщая замечание Е. С. Голода: при $l = 1$ она есть

$$0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{\text{Id}_1} R^n \longrightarrow F_l(M) \longrightarrow 0,$$

а при $l > 1$ матрицу $(\text{Id}_1 | \dots | \text{Id}_l)$ можно представить как блочную $(n \times ln)$ -матрицу, блоки которой есть аналогичные Id -матрицы для соответствующего K -модуля $\mathcal{M}$. Так как эти блоки коммутируют между собой, то их можно использовать как элементы матрицы для построения комплекса Игона–Норкотта R -модуля $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{k}} R$, и этот комплекс будет минимальной резольвентой. Это позволяет найти различные численные инварианты модулей $F_l(M)$, обобщая таким образом основные результаты из [2].

Следующее частичное обращение теоремы 1 демонстрирует естественность ограничений, накладываемых на алгебру при $l > 1$:

ТЕОРЕМА 2. Пусть поле $\mathbb{k}$ совершенно и алгебра A такова, что для некоторого $l > 1$ либо (i) функтор $F_l(\cdot)$ точен, либо (ii) для любого конечномерного A -модуля M модуль $F_l(M)$ коэн-маколеев. Тогда A является прямой суммой указанного в условии теоремы 1 вида, и в случае (ii) n_i не зависят от i .

Было бы интересно получить из комплекса Игона–Норкотта, являющегося минимальной резольвентой модуля $\mathcal{M}_n$ из [1], явную ациклическую резольвенту для пучка кватернионно-дифференцируемых функций и с ее помощью дать для результатов из [1] аналитические доказательства, которых не хватает авторам.

Автор хотел бы поблагодарить Е. С. Голода за постоянное внимание и поучительные замечания и Е. А. Котельникову, подтолкнувшую его к работе, а также рецензента за упрощение некоторых рассуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. W. Adams, P. Loustau, V. P. Palamodov, D. C. Struppa // Ann. Inst. Fourier. 1997. V. 47. № 2. P. 623–640. [2] W. W. Adams, P. Loustau // Pacific J. Math. 2000. V. 196. № 1. P. 1–15. [3] W. Bruns, U. Vetter. Determinantal Rings. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1327.)

Принято редколлегией
24.09.2001