Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О максимальных подорграфах с наибольшим числом перрона,
УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 08:32:52

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДОРГРАФАХ С НАИБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПЕРРОНА

С. В. САВЧЕНКО

Любой *максимальный подорграф* ориентированного графа (*орграфа*) G (с множеством вершин $V(G)$ и множеством дуг $E(G)$) имеет вид $G - w$ и получается из G удалением некоторой вершины w и всех инцидентных ей дуг (в нашей работе мы будем придерживаться определений главы 3 книги [1]). Обозначим через $\lambda(G - w)$ *число Перрона* орграфа $G - w$, которое, по определению, совпадает со спектральным радиусом его матрицы смежности. В дальнейшем мы будем рассматривать *максимальные подорграфы с наибольшим числом Перрона* (максимальные подорграфы с наименьшим числом Перрона были исследованы в [2]). Любой такой подорграф $G - w$ определяется следующим условием: $\lambda(G - w) = \max_{v \in V(G)} \lambda(G - v)$. Если орграф $G - w$ не является *сильно связным*, то большой интерес представляют его сильно связанные подорграфы, числа Перрона которых совпадают с $\lambda(G - w)$. В спектральной теории графов они называются *сильными компонентами Перрона* или, просто, *компонентами Перрона*. Все результаты нашей работы вытекают из следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть G — сильно связный орграф, $G - w$ — любой максимальный подорграф с наибольшим числом Перрона, $(G - w)'$ — любая его компонента Перрона и G_w — подорграф, порожденный всеми вершинами G , которые не принадлежат $(G - w)'$. Тогда существуют две такие вершины w_{in} и w_{out} в G_w , что все дуги из $V((G - w)')$ в $V(G_w)$ входят в вершину w_{in} и все дуги из $V(G_w)$ в $V((G - w)')$ выходят из вершины w_{out} . Вершина w_{out} достижима из w_{in} в G_w , и расстояние между w_{in} и w_{out} на единицу меньше порядка G_w .

Из леммы следует, что если орграф $G - w$ не является сильно связным, то степень исхода вершины w_{in} равна единице. Поэтому если количество дуг, выходящих из каждой вершины сильно связанного орграфа G , больше или равно двум, то любой его максимальный подорграф с наибольшим числом Перрона является сильно связным (этот результат уточняет лемму 6.5.2 [3]). В случае, когда G — сильно связный *турнир* с $n \geq 4$ вершинами, расстояние между w_{in} и w_{out} не может быть больше единицы. Если w_{in} не совпадает с w_{out} (в противном случае $w_{\text{in}} = w_{\text{out}} = w$), то степень захода w_{in} и степень исхода w_{out} равны $n - 2$. Так как существует дуга $(w_{\text{in}}, w_{\text{out}})$, то любой максимальный подтурнир, отличный от $G - w_{\text{in}}$ и $G - w_{\text{out}}$, является сильно связным (этот результат уточняет теорему 3 [4]).

В силу леммы в случае произвольного сильно связанного орграфа G в его подорграфе G_w существует единственная *гамильтонова цепь* $\tilde{\gamma} = \{w_i\}_{i=0}^p$ такая, что $w_0 = w_{\text{in}}$ и $w_p = w_{\text{out}}$. Если $(w_m, w_k) \in E(G)$, где $m \leq k - 2$, то в $G - w_{m+1}$ путь $v_0, w_0, \dots, w_m, w_k, \dots, w_p, v_p$ соединяет вершины v_0 и v_p сильно связанного орграфа $(G - w)'$ и проходит через вершины w_{in} и w_{out} , которые не принадлежат $(G - w)'$. Поэтому $\lambda(G - w_{m+1}) > \lambda(G - w)$, что противоречит выбору w (на этом рассуждении основано доказательство леммы). Таким образом, помимо дуг (w_i, w_{i+1}) , где $i = 0, \dots, p - 1$, подорграф G_w может содержать только дуги вида (w_m, w_k) , где $0 \leq k < m \leq p$. Если G — *эйлеров орграф*, то такие дуги отсутствуют и, следовательно, подорграф G_w является *направленной цепью*.

Маршрут, проходящий через все вершины орграфа, называется *гамильтоновым*. Орграф является сильно связным, если и только если он содержит *циклический гамильтонов маршрут*. Нетрудно показать, что в этом случае по крайней мере два максимальных подорграфа имеют гамильтоновы маршруты. При помощи гамильтоновой цепи $\tilde{\gamma} = \{w_i\}_{i=0}^p$ в G_w можно построить гамильтонов маршрут в максимальном подорграфе $G - w$ с наибольшим числом Перрона (отсюда, в частности, будет следовать, что если G — связный неориентированный граф, то $G - w$ также связан). Действительно, так как $w \in V(G_w)$, то $w = w_m$ для некоторого m , где $0 \leq m \leq p$. Выберем любые две такие вершины v_{in} и v_{out} в $(G - w)'$, что $(v_{\text{in}}, w_{\text{in}}) \in E(G)$ и

$(w_{\text{out}}, v_{\text{out}}) \in E(G)$. Тогда объединение единственного пути из w_{m+1} в w_{out} , любого гамильтонова маршрута из v_{out} в v_{in} в сильно связном орграфе $(G - w)'$ и единственного пути из w_{in} в w_{m-1} является гамильтоновым маршрутом в $G - w$. Любой гамильтонов маршрут в $G - w_{\text{in}}$ заканчивается в $(G - w)'$. Аналогично, любой гамильтонов маршрут в $G - w_{\text{out}}$ начинается в $(G - w)'$. Хорошо известно ([5; гл. XIII, теорема 7], см. также [6; следствие 3.5]), что матрица смежности орграфа с единственной компонентой Перрона имеет правый (левый) положительный вектор Перрона (т.е. собственный вектор с положительными координатами, соответствующий числу Перрона), если и только если из любой его вершины можно добраться до компоненты Перрона (любая его вершина достижима из компоненты Перрона). Поэтому справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — сильно связный орграф. Предположим, что каждый его максимальный подорграф $G - w$ с наибольшим числом Перрона содержит только одну компоненту Перрона. Тогда гамильтонова цепь из w_{in} в w_{out} в G_w является единственным простым путем $\tilde{\gamma} = \{w_i\}_{i=0}^p$, проходящим через вершину w и обладающим следующими свойствами:

- 1) для любого $i = 0, \dots, p$ максимальный подорграф $G - w_i$ имеет наибольшее число Перрона;
- 2) матрица смежности $G - w_0$ имеет правый положительный вектор Перрона;
- 3) матрица смежности $G - w_p$ имеет левый положительный вектор Перрона;
- 4) матрица смежности $G - w_i$, где $i = 1, \dots, p-1$, не имеет ни левого, ни правого положительного вектора Перрона.

Орграф с единственной компонентой Перрона является сильно связным, если и только если его матрица смежности имеет правый и левый положительные векторы Перрона. Поэтому в силу теоремы 1 максимальные подорграфы $G - w_0, \dots, G - w_p$ все вместе наследуют свойства сильно связного орграфа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G — сильно связный орграф. Предположим, что некоторый максимальный подорграф $G - w$ с наибольшим числом Перрона обладает по крайней мере двумя компонентами Перрона. Тогда для любого w_{in} существует единственная вершина v такая, что $(v, w_{\text{in}}) \in E(G)$. Расстояние между w_{in} и v на единицу меньше порядка орграфа G .

Таким образом, при невыполнении условия теоремы 1 орграф G является гамильтоновым и его диаметр на единицу меньше его порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Богомолов, В. Н. Салий. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. [2] С. В. Савченко // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 191–192. [3] R. A. Brualdi, B. Shader. Matrices of Sign-Solvable Linear Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. [4] J. W. Moon. Topics on Tournaments. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968. [5] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М.: Наука, 1967. [6] H. Schneider // Linear Algebra Appl. 1986. V. 84. P. 161–189.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: sav@icp.ac.ru

Принято редколлегией
24.09.2001