Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Болибрух, А. А. Ирматов, М. И. Зеликин, О. Б. Лупанов, В. М. Майнулов, Е. Ф. Мищенко, М. М. Постников, Ю. П. Соловьев, Е. В. Троицкий, Александр Сергеевич Мищенко (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 167–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:51:14

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ МИЩЕНКО

(к шестидесятилетию со дня рождения)

18 августа исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, ведущему научному сотруднику Математического института им. В.А. Стеклова РАН, лауреату Государственной премии Российской Федерации Александру Сергеевичу Мищенко.

А. С. Мищенко родился в 1941 г. в Ростове-на-Дону. Его отец — Сергей Тимофеевич (1903–1977) — инженер-кораблестроитель, работал в то время главным инженером судоремонтных мастерских, мать — Варвара Петровна (1907–1985) — воспитывала двух своих маленьких сыновей. В 1943 г. Сергей Тимофеевич был репрессирован (освобожден в 1952 г., реабилитирован в 1965 г.) и матери с маленькими детьми пришлось переехать к деду в г. Барвенково Харьковской области, где Александр Сергеевич и провел свое детство и школьные годы.

В 1958 г. Александр Сергеевич с золотой медалью окончил среднюю школу и поступил в Московский физико-технический институт, затем в 1960 г. перевелся на механико-математический факультет Московского университета, который с отличием окончил в 1965 году. Под руководством акад. П. С. Александрова еще в студенческие годы Александр Сергеевич получил свои первые научные результаты в области топологии [1]. Сразу же после окончания университета Александр Сергеевич начал свое обучение в аспирантуре механико-математического факультета у профессора С. П. Новикова. В эти годы он активно занимался алгебраической топологией и совместно с В. М. Бухштабером опубликовал обширную работу “*К-теория на категории бесконечных клеточных комплексов*” [2], внесшую существенный вклад в развитие этой области топологии и удостоенную премии Московского математического общества.

Научная и педагогическая деятельность А. С. Мищенко после окончания аспирантуры в 1968 г. связана с механико-математическим факультетом МГУ. В 1973 г. он защищает докторскую диссертацию, а в 1979 г. становится профессором. Вокруг А. С. Мищенко на факультете образовалась сильная группа ученых. Он воспитал 4 докторов и 15 кандидатов наук, написал 4 монографии и 2 учебника, опубликовал более 140 научных работ. Научная деятельность А. С. Мищенко получила широкое признание. В 1970 г. он был приглашенным докладчиком Международного конгресса математиков в Ницце. В 1971 г. ему была присуждена премия Московского математического общества, а в 1996 г. научные достижения А. С. Мищенко были отмечены Государственной премией Российской Федерации.

Основное направление исследований А. С. Мищенко, принесших ему мировую известность,

связано с изучением и применением алгебраических и функциональных методов в топологии гладких многообразий. Хорошо известно, что гладкая структура на многообразии порождает систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий рассматриваемого многообразия. Характеристические классы позволяют описывать строение гладких многообразий; кроме того, с их помощью получаются различные классификационные теоремы.

Одна из классических проблем дифференциальной топологии заключается в нахождении характеристических классов, не зависящих от выбора гладкой структуры и являющихся топологическими или гомотопическими инвариантами. Если проблема топологической инвариантности характеристических классов была решена еще в работах С. П. Новикова в середине 60-х г., то проблема нахождения гомотопически инвариантных характеристических классов до сих пор далека от своего полного решения. К этой проблеме сводятся многие важные задачи дифференциальной топологии. Особый интерес она вызывает еще и потому, что в отличие от других топологических проблем существенную роль в ней играет фундаментальная группа многообразия, описание и распознавание которой невозможно в конечных терминах. Точная формулировка проблемы известна под названием гипотезы Новикова, положительное решение которой позволило бы хотя бы частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальной группы в задаче классификации гладких структур на многообразиях. Гипотеза Новикова заключается в том, что любое характеристическое число вида $\text{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M] \rangle$, где $L(M)$ – полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi_1(M); \mathbb{Q})$ и $f: M \rightarrow B\pi_1(M)$ – классифицирующее отображение, является гомотопическим инвариантом многообразия M . Числа $\text{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M .

Для односвязных многообразий гипотеза Новикова сводится к утверждению о том, что классическая сигнатура $\langle L(M), [M] \rangle$ является гомотопическим инвариантом. Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных С. П. Новиковым и В. Браудером, устанавливается, что гомотопически инвариантным характеристическим классом является только классическая сигнатура многообразия. Таким образом, для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классов была полностью решена в классических работах 60-х годов.

Ситуация с неодносвязными многообразиями оказалась много сложнее. В 1970 г. А. С. Мищенко установил [6], что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются только высшие сигнатуры. Более того, им был найден универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами – так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(\mathbb{Q}\pi_1(M))$, – являющаяся аналогом классической сигнатуры.

В работах 1974–1975 гг. [7]–[9] А. С. Мищенко ввел понятие и разработал теорию фредгольмовых представлений, что позволило ему доказать гипотезу Новикова для широкого класса фундаментальных групп. Эта теория была в дальнейшем распространена им на случай произвольных C^* -алгебр и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. Первоначальное доказательство формул Хирцебруха для фредгольмовых представлений основывалось на локальных свойствах эллиптических операторов на компактном многообразии. Позднее А. С. Мищенко разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуанкаре. С помощью гомотопической техники им была доказана обобщенная формула Хирцебруха для кусочно линейных многообразий, где техника эллиптических операторов не работает.

В 1978 г. А. С. Мищенко предпринял исследование по изучению гомотопических свойств эллиптических операторов с коэффициентами в произвольной C^* -алгебре. Такие операторы естественным образом возникают в различных задачах теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях. Эти операторы не являются фредгольмовыми операторами в классическом смысле, однако как ядро, так и коядро таких операторов представляются как конечно порожденные проективные модули над C^* -алгеброй и их разность является единственным гомотопическим инвариантом эллиптического оператора. В статье [13] были установлены формулы для индекса эллиптических операторов над произвольной C^* -алгеброй, обобщающие формулы Атьи–Зингера. В частности, было получено третье доказательство обобщенных формул Хирцебруха. Теория эллиптических операторов над C^* -алгебрами нашла в дальнейшем мно-

гочисленные применения как для уравнений в частных производных, так и для задач геометрии и топологии, равным образом в теории банаховых алгебр и C^* -модулей [11], [12]. В частности, с помощью этой теории в дальнейшем исследовались гомотопические и спектральные свойства эллиптических операторов на некомпактном пространстве $\mathbb{R}^n$ с быстроубывающими, почти периодическими или случайными коэффициентами. В топологии эта теория нашла применение для изучения L_2 -когомологий некомпактных многообразий, аналитического кручения, инварианта Новикова–Шубина, циклических когомологий и др.

Теория фредгольмовых представлений нашла оригинальное применение в дифференциальной геометрии многообразий, допускающих риманову метрику неположительной секционной кривизны. Этот класс многообразий обладает замечательным топологическим свойством быть классифицирующим пространством своей фундаментальной группы. Класс таких многообразий достаточно широк, в него, в частности, входят однородные пространства полупростых групп Ли, профакторизованных по левому действию решетки. В 1974 г. А. С. Мищенко для этого класса компактных многообразий построил естественное семейство фредгольмовых представлений фундаментальной группы, характер Черна которого равен самодуальному элементу на декартовом квадрате относительно двойственности Пуанкаре [7]. Этот результат автоматически влечет доказательство гипотезы Новикова для соответствующих фундаментальных групп. Все группы указанного типа многообразий являются так называемыми гиперболическими группами. До последнего времени дальнейшие попытки различных авторов расширить класс групп, для которых справедлива гипотеза Новикова и обобщающая ее гипотеза Баума–Конна, не выходили за рамки класса групп гиперболического типа, причем методы исследования были по существу основаны на разработанной А. С. Мищенко теории фредгольмовых представлений, эллиптических операторов над C^* -алгебрами и C^* -модулей. Лишь в последние три года в исследовании гипотезы Новикова удалось выйти за пределы класса гиперболических групп (Н. Хигсон и Г. Г. Каспаров).

Пионерские работы А. С. Мищенко в области фредгольмовых представлений и C^* -гильбертовых модулей, вместе с работами Г. Г. Каспарова и Брауна–Дугласа–Филлмора, послужили толчком к проникновению топологических (прежде всего, гомотопических) методов в теорию C^* -алгебр. Наиболее интересные результаты здесь связаны с теорией асимптотических гомоморфизмов. В настоящее время теория C^* -алгебр и гильбертовых C^* -модулей получили дальнейшее развитие как в работах А. С. Мищенко и его учеников, так и в работах других математических школ в мире. Асимптотический подход позволил А. С. Мищенко [18], [19] разработать теорию так называемых почти алгебраических комплексов Пуанкаре, в которых квадрат граничного оператора отличен от нуля, но достаточно мал, а диаграммы лишь “почти” коммутативны. Такой почти алгебраический комплекс Пуанкаре определяется комбинаторной структурой многообразия при достаточно мелком разбиении, при этом корректно определена его сигнатура, которая может служить левой частью формулы Хирцебруха.

Объем юбилейной статьи не позволяет осветить всю многогранную научную деятельность А. С. Мищенко. Он решил в первой нетривиальной размерности $n = 4$ поставленную В. И. Арнольдом в середине 60-х г. проблему о полной интегрируемости свободного движения многомерного твердого тела, найдя дополнительную серию первых интегралов [4] (позднее эта проблема была решена С. В. Манаковым для всех $n > 4$ с использованием методов теории солитонов и римановых поверхностей), установил связь условий квантования для канонического оператора Маслова с гомологическими инвариантами лагранжева многообразия [10], дал решение линейной дифференциальной игры преследования без дискриминации убегающего объекта [16], получил формулы для аналитического кручения неодносвязных многообразий над C^* -алгебрами, нашел гомологические свойства димерных покрытий, связанных с двумерной моделью Изинга. На всех его работах лежит печать высокого мастерства и одухотворенного таланта.

Мы желаем Александру Сергеевичу Мищенко – замечательному ученому и педагогу – крепкого здоровья, счастья, многих лет плодотворной работы и осуществления новых творческих замыслов.

*А. А. Бוליбух, А. А. Ирматов, М. И. Зеликин,
О. Б. Лупанов, В. М. Мануйлов, Е. Ф. Мищенко,
М. М. Постников, Ю. П. Соловьев, Е. В. Троицкий*

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ А. С. МИЩЕНКО

- [1] Пространства с точечно счетной базой // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. С. 985–988
- [2] K -теория на категории бесконечных клеточных комплексов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 560–604 (совм. с В. М. Бухштабером)
- [3] Extraordinary homology theories: Bordism and K -theory // Actes Congr. Internat. Math. Nice. 1971. V. 2. P. 113–119
- [4] Интегралы геодезических потоков на группах Ли // Функци. анализ и его прил. 1970. Т. 4. № 3. С. 73–77
- [5] Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии // УМН. 1971. Т. 26. № 2. С. 131–154 (совм. с В. М. Бухштабером, С. П. Новиковым)
- [6] Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. I–III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 501–414; 1971. Т. 35. С. 664–675; 1332–1371
- [7] Бесконечные представления дискретных групп и высшие сигнатуры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 1. С. 81–106
- [8] О фредгольмовых представлениях дискретных групп // Функци. анализ и его прил. 1975. Т. 9. № 2. С. 36–41
- [9] Эрмитова K -теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа // УМН. 1976. Т. 31. № 2. С. 69–134
- [10] Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1978 (совм. с Б. Ю. Стерниным, В. Е. Шаталовым)
- [11] Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения к K -теории // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 67–79
- [12] C^* -algebras and K -theory // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 262–274
- [13] Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. С. 831–859 (совм. с А. Т. Фоменко)
- [14] Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 2. С. 209–226 (совм. с Ю. П. Соловьевым)
- [15] Векторные расслоения и их применения. М.: Наука, 1984
- [16] Линейная дифференциальная игра преследования (аналитическая теория) // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 2. С. 131–158 (совм. с Л. С. Понтрягиным)
- [17] Квазиклассические асимптотики квазичастиц // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 6. С. 85–116 (совм. с В. П. Масловым)
- [18] Теория почти алгебраических комплексов Пуанкаре // Труды МИРАН. 2000. Т. 231. С. 294–322
- [19] Формула Хирцебруха: 45 лет истории и современное состояние // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 4. С. 16–35