Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Вершинин, Инварианты Васильева и косы с особенностями, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:21:31

ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА И КОСЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ

В. В. ВЕРШИНIN

Инварианты, определенные В. А. Васильевым [1], применимы для изучения узлов и зацеплений в трехмерных многообразиях [2]–[4]. Классические теоремы Дж. Александера и А. А. Маркова установили тесные взаимосвязи между теорией зацеплений и теорией кос. В контексте инвариантов Васильева – это связи между зацеплениями с особенностями и косами с особенностями, где под особенностями понимаются только двойные точки трансверсальных самопересечений. Эти связи изучались Дж. Баесом [5] и Дж. Бирман [6].

Целью настоящей заметки является перенесение результатов Дж. Баеса [5] на зацепления в телах с ручками. В нашем подходе мы используем группу кос в теле с ручками, которая изучалась А. Б. Сосинским [7] и автором [8], обобщения теорем Дж. Александера и А. А. Маркова для кос с особенностями, доказанные Дж. Бирман [6] и Б. Гемейном [9], а также относительный вариант теоремы А. А. Маркова, доказанный С. Ламбропулу и К. Рурком [10]. Доказательства Дж. Баеса проходят с необходимыми изменениями для случая тел с ручками.

Пусть SB_k есть моноид кос с особенностями из k нитей [5], [6], который называется также моноидом Баеса–Бирман или обобщенным моноидом кос. Он имеет образующие $\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_i^{-1}, \bar{a}_i, i = 1, \dots, k-1$, и соотношения

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j &= \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \bar{a}_i \bar{a}_j &= \bar{a}_j \bar{a}_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \bar{a}_i \bar{\sigma}_j &= \bar{\sigma}_j \bar{a}_i, \quad \text{если } |i-j| \neq 1, \\ \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i &= \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1}, \\ \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{a}_i &= \bar{a}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1}, \\ \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{a}_{i+1} &= \bar{a}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i, \\ \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i^{-1} &= \bar{\sigma}_i^{-1} \bar{\sigma}_i = 1.\end{aligned}$$

Геометрически $\bar{\sigma}_i$ соответствует стандартной образующей группы кос Br_k , канонически вложенной в SB_k , а $\bar{a}_i$ представляет пересечение i -й и $(i+1)$ -й нитей.

В качестве аналогичного объекта в теле с ручками рода g естественно рассматривать подмоноид SB_n^g моноида SB_{g+n} , в котором первые g нитей остаются незаплетенными и непересекающимися. Группа кос Br_n^g в теле с ручками рода g [7], [8] задается образующими $\tau_k, k = 1, 2, \dots, g; \sigma_i, i = 1, \dots, n-1$ и соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \tau_k \sigma_i = \sigma_i \tau_k, \quad \text{если } k \geq 1, i \geq 2, \\ \tau_k \sigma_1 \tau_k \sigma_1 = \sigma_1 \tau_k \sigma_1 \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, g; \\ \tau_k \sigma_1^{-1} \tau_k \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \tau_k \sigma_1 \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, g-1; \quad l = 1, 2, \dots, g-k. \end{array} \right.$$

Эта группа рассматривается как подгруппа классической группы кос Br_{g+n} из $g+n$ нитей, в которой косы из Br_n^g оставляют первые g нитей незаплетенными. Тогда $\tau_k, k = 1, 2, \dots, g$, определяются как следующие косы: $\tau_k = \bar{\sigma}_g \bar{\sigma}_{g-1} \cdots \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k^2 \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \cdots \bar{\sigma}_{g-1}^{-1} \bar{\sigma}_g^{-1}$. Элементы $\sigma_i \in Br_n^g$ соответствуют элементам $\bar{\sigma}_{i+g} \in Br_{g+n}$.

Пусть K есть коммутативное кольцо с единицей, $K[\varepsilon]$ – кольцо многочленов от одной переменной ε над K , KSB_n^g – полугрупповая алгебра моноида (полугруппы с единицей) SB_n^g над K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгеброй Васильева V_n^g называется фактор-алгебра алгебры KSB_n^g $K[\varepsilon]$ по идеалу, порожденному соотношениями: $\sigma_i - \sigma_i^{-1} = \varepsilon a_i$.

Гомоморфизм вложения $SB_n^g \rightarrow SB_{g+n}$ индуцирует гомоморфизм алгебр $\alpha: V_n^g \rightarrow V_{n+g}$ такой, что $\alpha(\sigma_i) = \bar{\sigma}_{g+i}, \alpha(a_i) = \bar{a}_{g+i}, \alpha(\tau_k) = \bar{\sigma}_g \bar{\sigma}_{g-1} \cdots \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k^2 \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \cdots \bar{\sigma}_{g-1}^{-1} \bar{\sigma}_g^{-1}$. Определим гомоморфизм $v^g: KBr_n^g \rightarrow V_n^g$ по формулам: $v^g(\sigma_i) = \sigma_i, v^g(\tau_i) = \tau_i$. Пусть $K(\varepsilon)$ есть алгебра лорановских многочленов от ε над K .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-01-01631 и 96-01-00062G).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Гомоморфизм $v^g \otimes 1: KBr_n^g \otimes K(\varepsilon) \rightarrow V_n^g \otimes_{K[\varepsilon]} K(\varepsilon)$ является изоморфизмом.

Пусть $\mathcal{L}$ есть инвариант зацеплений со значениями в K , что в нашем случае означает инвариант с точностью до изотопии ориентированных зацеплений в телах с ручками рода g . Он каноническим способом продолжается до инварианта зацеплений с особенностями со значениями в $K(\varepsilon)$ по формуле: $\mathcal{L}(L_+) - \mathcal{L}(L_-) = \varepsilon \mathcal{L}(L_\times)$, где L_+ , L_- и $L_\times$ обозначают диаграммы зацеплений с “правым”, “левым” проходом и пересечением в данной точке, оставляющие остальную диаграмму без изменений. Инвариант $\mathcal{L}$ называется *инвариантом порядка d* , если он равен нулю на всех обобщенных зацеплениях, у которых по крайней мере $d + 1$ самопересечений. Инвариант порядка d для некоторого d называется *инвариантом конечного типа*.

Для всех n имеются вложения $V_n^g \subset V_{n+1}^g$ и $KBr_n^g \subset KBr_{n+1}^g$. Пусть V^g и KBr^g есть соответствующие прямые пределы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Марковским следом на V^g называется $K[\varepsilon]$ -линейный гомоморфизм $T: V^g \rightarrow E$ в некоторый $K[\varepsilon]$ -модуль E , удовлетворяющий следующим условиям: $T(xy) = T(yx)$ для всех $x, y \in V^g$, $T(x\sigma_n^{\pm 1}) = zT(x)$ для некоторого $z \in K$ и для всех $x \in V_n^g \subset V^g$. Аналогично определяется марковский след $\text{tr}: KBr^g \rightarrow M$ в некоторый K -модуль M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Марковский след $T: V^g \rightarrow K[\varepsilon]$ называется *однородным степени d* , если для каждого $x \in KBr^g$ его образ $T(v(x)) \in K[\varepsilon]$ является однородным многочленом от ε степени d .

Для косы $x \in Br_n^g$ обозначим через $\hat{x}$ ее замыкание по отношению к последним n нитям. Оно рассматривается как зацепление в теле с ручками рода g . Для зацепления L обозначим через $L \cup \circ$ незацепленное объединение с незаузленной окружностью, которая также незаплетена с циклами тела с ручками.

ТЕОРЕМА. Имеется взаимнооднозначное соответствие между инвариантами зацеплений $\mathcal{L}$ степени d со значениями в K такими, что $z\mathcal{L}(L \cup \circ) = \mathcal{L}(L)$ для некоторого $z \in K^*$ (группы единиц кольца K), и марковским следами $T: V^g \rightarrow K[\varepsilon]$, однородными степени d . Инвариант $\mathcal{L}$ определяет след T , и обратно, по формуле

$$T(v^g(x)) = \varepsilon^d z^{n-1} \mathcal{L}(\hat{x}) \quad \text{для } x \in Br_n^g.$$

Пусть $T_S: \mathbf{Z}Br \rightarrow \mathbf{Z}(\varepsilon)$ есть след, построенный В. Г. Тураевым [11]. Это марковский след с $z = 1$: $T_S(x\sigma_n^{\pm 1}) = T_S(x)$ для всех $x \in Br_n \subset Br$. Для $i = 0, \dots, g$ определим след $T_{S,i}: \mathbf{Z}Br^g \rightarrow \mathbf{Z}(\varepsilon)$ как композицию $\mathbf{Z}Br^g \xrightarrow{\phi} \mathbf{Z}Br^{g-i} \rightarrow \mathbf{Z}Br \xrightarrow{T_S} \mathbf{Z}(\varepsilon)$, где первое отображение определяется по формулам: $\phi(\tau_j) = e$, для $j = 1, \dots, i$; $\phi(\tau_j) = \tau_{j-i}$ для $j = i+1, \dots, g$; $\phi(\sigma_k) = \sigma_k$ для всех k ; а второе есть каноническое вложение. Применим стандартную подстановку $q = \exp(\varepsilon)$ и получим марковский след $T_i: V^g \rightarrow \mathbf{Z}[[\varepsilon]]$, такой что $T_i v^g = T_{S,i}$. Имеем $T_i = \sum_{d=0}^{\infty} T_{i,d}$, где каждое отображение $T_{i,d}: V^g \rightarrow \mathbf{Z}[\varepsilon]$ есть однородный марковский след степени d : $T_{i,d}(x\sigma_n^{\pm 1}) = T_{i,d}(x)$ для всех $x \in V_n^g \subset V^g$. Каждый след $T_{i,d}$ дает инвариант зацеплений $\mathcal{L}_{i,d}$ степени d такой, что $\mathcal{L}_{i,d}(\hat{x}) = \varepsilon^{-d} T_{i,d}(v^g(x))$ для $x \in Br_n^g$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vassiliev V. A. Complements of Discriminants of Dsmooth Daps: Topology and Applications. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1992. [2] Xiao-Song Lin // Topology 1994. V. 33. №1. P. 45–71. [3] Vassiliev V. A. On Invariants and Cohomology of Spaces of Knots in Arbitrary Manifolds // Preprint: Independent Moscow Univ., 1997. [4] Goryunov V. V. Vassiliev Invariants of Knots in a Solid Torus // Preprint: Univ. of Liverpool, 1997. [5] Baez J. C. // Letters in Math. Physics 1992. V. 26. P. 43–51. [6] Birman J. S. // Bull. of AMS 1993. V. 28. №2. P. 253–387. [7] Sossinsky A. B. Preparation Theorems for Isotopy Invariants of Links in 3-manifolds // Quantum Groups, Proc. (LNM, No 1510): Berlin a. o., 1992. [8] Vershinin V. V. Homology of Braid Groups in Handlebodies // Preprint No 96/06-2: Univ. de Nantes, 1996. [9] Gemein B. Singular Braids and Markov's Theorem // Preprint: Univ. of Düsseldorf, 1996. [10] Lambropoulou S., Rourke C. // Topology and Its Appl. 1997. V. 78. [11] Turaev V. G. // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 527–553.