Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ягодновский, Представления многозначных групп на графах, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:20:21

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ГРУПП НА ГРАФАХ

П. В. Ягодовский

В настоящей заметке излагаются результаты и конструкции, полученные при изучении представлений дискретных бикосетных многозначных групп (см. [3], [4], [6]) на симметрических графах. Представления на симметрических графах определяются для однопорожденных инволютивных многозначных групп с эрмитовыми образующими. (Группа называется *однопорожденной*, если каждый ее элемент содержится в некоторой итерации образующего.) Такие представления естественно возникают в теории многозначных динамических систем с дискретным временем (см. [5]); первое такое представление было обнаружено и исследовано в работе [2].

Будем говорить, что однопорожденная инволютивная многозначная группа A имеет представление на симметрическом графе Γ с множеством вершин $\mathcal{V}(\Gamma)$, если зафиксировано вложение ее комбинаторной алгебры (см. [1]) в алгебру линейных операторов на пространстве функций на $\mathcal{V}(\Gamma)$, при котором оператор, отвечающий элементу $a \in A$, переводит характеристическую функцию произвольной вершины $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ в характеристическую функцию множества $U_{a,v} \subset \mathcal{V}(\Gamma)$, зависящего от a и v , причем для образующего a_0 группы A и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ множество $U_{a_0,v}$ суть множество вершин, инцидентных вершине v . Отсюда, в частности, следует, что a_0 эрмитовый, т.е. в произведение a_0 на себя входит единица группы.

ЛЕММА. *Каждая однопорожденная многозначная группа A с эрмитовым образующим и бикосетной структурой (т.е. представляемая как факторпространство обычной группы по ее подгруппе) имеет представление на симметрическом графе.*

А именно, группа $A = H \setminus G / H$ с образующим a_0 действует на графе Γ , у которого $\mathcal{V}(\Gamma)$ есть множество левых смежных классов $H \setminus G$ группы G по подгруппе H , и две вершины Hg и Hg' инцидентны, если и только если $g' = h'thg$ для некоторых $h, h' \in H$ (где t — представитель двойного смежного класса G по H , представляющего образующий a_0). Группа G действует справа на графе Γ транзитивно на множествах его вершин и ребер. Группа H при этом является стабилизатором вершины $v = He$. Обозначим через K подгруппу группы H , оставляющую неподвижной произвольное ребро, выходящее из v . Тогда возникает естественная точная (в определенном смысле) последовательность бикосетных групп

$$1 \longrightarrow K \setminus H / K \xrightarrow{i} K \setminus G / K \xrightarrow{\pi} H \setminus G / H \longrightarrow 1. \quad (*)$$

Бикосетная группа $K \setminus G / K$ является, в специальном смысле, расширением группы $H \setminus G / H$, причем ее значность, равная порядку K , меньше значности $H \setminus G / H$, равной порядку H .

Далее, сопоставим симметрическому графу Γ его флаг-комплекс $\tau(\Gamma)$ и рассмотрим над ним универсальное накрытие $\pi: \tau(\Gamma^U) \rightarrow \tau(\Gamma)$. Пространство $\tau(\Gamma^U)$, очевидно, является флаг-комплексом, одномерный остов Γ^U которого представляет собой симметрический граф. Этот граф называется *универсальным графом, накрывающим граф* Γ . Отображение накрытия индуцирует гомоморфизм графов $\pi_*: \Gamma^U \rightarrow \Gamma$, причем существует такая группа $G^U \subset \text{Aut}(\Gamma^U)$ и гомоморфизм ϕ группы G^U на G , что $\forall g^U \in G^U$ и $\forall v^U \in \mathcal{V}(\Gamma^U)$ имеем $(\pi(v^U))^{\phi(g^U)} = \pi((v^U)^{g^U})$, где v^g обозначает правое действие элемента g на вершине v . Для графа Γ^U можно определить группы H^U и K^U , подобные группам H и K для графа Γ и лежащие в их прообразах относительно гомоморфизма ϕ . В случае, если группа H^U конечна, возникнет точная последовательность бикосетных групп, подобная последовательности $(*)$ и образующая, благодаря индуцированным ϕ морфизмам, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & K^U \setminus H^U / K^U & \xrightarrow{i^U} & K^U \setminus G^U / K^U & \xrightarrow{\pi^U} & H^U \setminus G^U / H^U \longrightarrow 1 \\ \parallel & & \phi_3 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_1 \downarrow & \parallel & (**) \\ 1 & \longrightarrow & K \setminus H / K & \xrightarrow{i} & K \setminus G / K & \xrightarrow{\pi} & H \setminus G / H & \longrightarrow 1. \end{array}$$

Когда же группа K^U имеет бесконечный порядок, бикосетные группы из верхней строки диаграммы $(**)$ не определены. Тогда приходится рассматривать обобщение многозначных групп, в которых результатом произведения двух элементов является *мера* на группе.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. 1. *Каждая однопорожденная бикосетная многозначная группа обладает расширением, имеющим меньшую значность.* 2. *Множество бикосетных однопорожденных групп с эрмитовыми образующими представляет собою дизъюнктное объединение множества категорий, запараметризованных парами (Γ^U, G^U) . Объектами каждой такой категории являются группы с представлениями на симметрических графах, накрываемых графом Γ^U , а морфизмы индуцируются отображениями накрытия.* 3. *У каждой из этих категорий имеется универсальный отталкивающий объект.*

Одной из основных в теории многозначных групп является проблема характеристики тех многозначных групп, которые допускают бикосет-структуры. Применительно к однопорожденным инволютивным многозначным группам с эрмитовыми образующими, она сводится к нахождению способа определять, принадлежит ли данная группа данной категории однопорожденных бикосетных групп с эрмитовыми образующими, определяемой данными (Γ^U, G^U) . Первыми этапами ее разрешения являются задачи о нахождении универсальных симметрических графов с данным локальным устройством и о вычислении универсальных объектов категорий, соответствующих этим графам. Предлагаемый автором подход к этим задачам будет описан в следующих публикациях.

В заключение я хочу выразить благодарность моему научному руководителю В. М. Бухштаберу за постановку задачи и активную поддержку в ее решении, а также И. В. Артельных за полезные обсуждения полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 3. С. 12–18. [2] V. M. Buchstaber, A. P. Veselov // Int. Math. Res. Not. 1996. V. 8. P. 381–400. [3] V. M. Buchstaber, E. G. Rees // Transformation Groups. 1997. V. 2. № 4. P. 325–349. [4] V. M. Buchstaber, E. G. Rees // Lie Groups and Lie Algebras. Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 85–107. [5] А. П. Веселов // УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 3–45. [6] П. В. Ягдовский // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 5. С. 197–224.