Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Об ограниченности ортонормированных собственных функций нелинейной краевой задачи типа Штурма–Лиувилля с неограниченной сверху весовой функцией на конечном отрезке, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:22:08

**ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ
ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА
ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ
ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ**

Г. А. Айгунов

Рассмотрим нелинейную краевую задачу:

$$-(y'(x))'_p = \lambda x^{-\alpha}(y(x))_p, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 x^{-\alpha} y^2(x) dx = 1, \quad (2)$$

где $0 < \alpha < 1$, $p > 1$ и $(z)_p \equiv |z|^{p-1} \operatorname{sign} z = |z|^{p-2} z$. В работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача (1)–(2) имеет непрерывные (вместе с первой производной) на $[0, 1]$ собственные функции $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Совокупность собственных функций $\{y_k(x)\}$ равномерно по k и x ограничена.*

Для доказательства существования совокупности $\{y_k(x)\}$ достаточно показать, что решение задачи Коши с условием $y(0) = 0$, $y'(0) = \alpha$ существует и единственно.

Действительно, так как при $x > 0$ $x^{-\alpha}$ – непрерывная функция, то можно воспользоваться свойствами монотонности нулей [1] и точно таким же образом, как и в указанной работе, показать существование $\{y_k(x)\}$. Справедлива следующая

ЛЕММА. *Пусть $\rho(x) > t$ непрерывна на $(0, 1]$ и суммируема на $[0, 1]$. Тогда существует единственное решение задачи Коши*

$$-(y'(x))'_p = \lambda \rho(x)(y(x))_p, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b \quad \text{при любых вещественных } a \text{ и } b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в [1], при преобразовании $y'(x) = r(x)s'(\varphi(x))$, $y(x) = r(x)s(\varphi(x))$ наше уравнение перейдет в систему

$$\begin{cases} \varphi'(x) = |s'(\varphi)|^p + \lambda \rho(x)|s(\varphi)|^p, \\ r'(x) = r(x)s'(\varphi)(s(\varphi))_p[1 - \lambda \rho(x)]. \end{cases}$$

Так как $|s'(\varphi)|^p + |s(\varphi)|^p = 1$, то $r^p(x) = |y'(x)|^p + |y(x)|^p$.

Поэтому $r(0) = (|a|^p + |b|^p)^{1/p}$. Если $r(0) \neq 0$, то из соотношения $y(0) = r(0)s(\varphi(0))$ определим $\varphi(0)$. Если $r(0) = 0$, то $\varphi(0)$ зададим произвольно.

Из второго уравнения системы следует, что

$$\ln r(x) = \ln c + \int_{x_0}^x s'(\varphi(t))(s(\varphi(t)))_p[1 - \lambda \rho(t)] dt, \quad \text{где } x_0 \in (0, 1].$$

Отсюда $r(x) = ce^{\int_{x_0}^x s'(\varphi(t))(s(\varphi(t)))_p[1 - \lambda \rho(t)] dt}$; так как $\rho(t)$ суммируема, то интеграл конечен.

Следовательно, либо $r(x)$ нигде не обращается в нуль, либо $r(x) \equiv 0$ ($c = 0$), поэтому решение $r(x) = 0$ – единственное в случае $r(0) = 0$. Значит, исходная задача Коши имеет единственное решение $y(x) \equiv 0$ в случае $a = b = 0$.

Пусть $r(0) \neq 0$. Тогда функция

$$r(x) = \frac{r(0)}{e^{\int_{x_0}^x s'(\varphi(t))(s(\varphi(t)))_p[1 - \lambda \rho(t)] dt}} e^{\int_{x_0}^x s'(\varphi(t))(s(\varphi(t)))_p[1 - \lambda \rho(t)] dt}$$

будет решением (однозначно по $r(0)$ определенным), если $\varphi(t)$ – решение первого уравнения – уже найдено. Таким образом, достаточно показать, что первое уравнение с начальным условием $\varphi(0) \in [-\pi p/2, \pi p/2]$ имеет единственное решение, $\pi p = 2\pi/(p \sin(\pi/p))$.

Рис. 1

Перепишав первое уравнение в виде $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x [|s'(\varphi(t))|^p + \lambda \rho(t) |s(\varphi(t))|^p] dt$, мы видим, что из интегрируемости $\rho(x)$, гладкости и ограниченности $s(\varphi)$ следует существование и единственность необходимого решения.

Лемма доказана и доказано существование $\{y_k(x)\}$, так как $x^{-\alpha}$ — суммируемая функция на $[0, 1]$. Покажем теперь ограниченность совокупности функций $\{y_k(x)\}$.

Обозначим нули $y_k(x)$ в порядке убывания через $z_0, z_1, z_2, \dots$ ($z_0 = 1, z_k = 0$).

Введем также обозначения $\alpha_i = |y'_k(z_i)|, h_i = \max_{x \in [z_i, z_{i+1}]} |y_k(x)|$.

По лемме 1 из [2], учитывая, что $\rho(x) = x^{-\alpha}$, имеем оценки

$$h_i \leq \frac{c\alpha_i}{(z_i^{-\alpha}\lambda_k)^{1/p}}, \quad 1 \leq \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \leq \left(\frac{z_{i+1}^{-\alpha}}{z_i^{-\alpha}}\right) \quad \text{и} \quad h_0 \geq \frac{\bar{c}\alpha_0}{(z_1^{-\alpha}\lambda_k)^{1/p}}.$$

$$\text{Отсюда } \frac{\alpha_j}{\alpha_0} = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \cdot \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_{j-2}} \cdot \dots \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \leq \left(\frac{z_j^{-\alpha}}{z_{j-1}^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{z_{j-1}^{-\alpha}}{z_{j-2}^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{z_1^{-\alpha}}{z_0^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{z_j^{-\alpha}}{z_0^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ или}$$

$$\alpha_j \leq z_j^{-\frac{\alpha}{p}} \alpha_0, \text{ следовательно, } h_j \leq \frac{cz_j^{-\frac{\alpha}{p}} \alpha_0}{(z_j^{-\alpha}\lambda_k)^{1/p}} = \frac{cz_1^{-\frac{\alpha}{p}}}{\bar{c}} \frac{\bar{c}\alpha_0}{(z_1^{-\alpha}\lambda_k)^{1/p}} \text{ и } h_j \leq \frac{cz_1^{-\frac{\alpha}{p}}}{\bar{c}} \alpha_0 h_0.$$

Очевидно, что $z_1(k) > z_1(2)$ для любого $k > 2$, поэтому имеем $h_j \leq \frac{cz_1^{-\alpha/p}(2)}{\bar{c}} h_0 = c_0 h_0$. Таким образом, если показать, что $h_0(k)$ равномерно по k ограничена, то теорема будет доказана. В силу того, что $y_k(x)$ нормирована, имеем:

$$\|y_k(x)\|_c = \frac{\|y_k(x)\|_c}{(\int_0^1 x^{-\alpha} y_k^2(x) dx)^{1/2}} \leq \frac{c_0 h_0(k)}{(\int_0^1 x^{-\alpha} y_k^2(x) dx)^{1/2}} < \frac{c_0 h_0(k)}{(\int_{1/2}^1 x^{-\alpha} y_k^2(x) dx)^{1/2}}.$$

Последнее выражение равномерно по k ограничено, так как на сегменте $[\frac{1}{2}, 1]$ функция $x^{-\alpha}$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, а $y_k(x)$ можно рассматривать как решение некоторой задачи Коши [3]. Таким образом, мы доказали, что краевая задача (1)–(2) имеет непрерывные на $[0, 1]$ собственные функции $y_k(x)$, равномерно по всем k и x ограниченные, если α достаточно мало. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Существует $\rho(x) \in C_{(0,1]}^\infty$ такая, что $0 < m \leq \rho(x) \leq M$ ($0 \leq x \leq 1$) и $C_0 > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y_n(x, \rho)\|_{C_{[0,1]}}}{\lambda_n^{\frac{1}{2p}}} > 0$, где $C_0 = \text{const}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Elbert // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1981. V. 30. P. 153–180. [2] Г. А. Айгунов // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 1999. №1. С. 3–11. [3] Г. А. Айгунов // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 129–130.