Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Бирюк, О пространственных производных решений уравнения Навье–Стокса с малой вязкостью, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:31:35

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА С МАЛОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

А. Э. БИРЮК

Рассмотрим динамику векторного поля $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ на n -мерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \ell\mathbb{Z}^n$, описываемую системой Навье–Стокса:

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

с положительной вязкостью ν . Начальные данные $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0$ предполагаются C^2 -гладкими. Известно, что соответствующее классическое решение системы (1), (2) существует при $0 \leq t < T_0 \leq \infty$ и $\|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{L_\infty} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0$, если $T_0 < \infty$. В работе [1] показано, что $T_0 \geq \frac{C(n)\ell^2}{\nu R^2(1 + \max\{0, \log R\})^2}$, где $R = \frac{\ell}{\nu} \|\mathbf{u}_0\|_{L_\infty}$ – число Рейнольдса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное поле $\mathbf{u}_0$ вырождено, если его матрица Якоби всюду нильпотентна, т.е. $(\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x})^n \equiv 0$. В противном случае мы говорим, что оно невырождено.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы Якоби $\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$

$$\chi_{t, \mathbf{x}}(\lambda) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} - \lambda \mathbf{I} \right) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} I_1(t, \mathbf{x}) + \dots + I_n(t, \mathbf{x}).$$

Вырожденность начальных данных равносильна условию $I_1(0, \cdot) \equiv I_2(0, \cdot) \equiv \dots \equiv I_n(0, \cdot) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что начальные данные $\mathbf{u}_0$ – невырожденное векторное поле. Тогда существуют ν -независимое положительное число T и ν -независимые положительные числа $\varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \dots$ такие, что для любого $\nu > 0$ и для любого $k \geq 2$ справедливо неравенство:*

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{T}^n} \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u_1}{\partial x_j^k} \right|, \dots, \left| \frac{\partial^k u_n}{\partial x_j^k} \right|, \frac{1}{\nu^{k/2}} \left| \frac{\partial^{k-1} p}{\partial x_j^{k-1}} \right| \right\} \right\} \geq \frac{\varkappa_k}{\nu^{k/2}}. \quad (3)$$

Как показывает наш следующий результат, предположение невырожденности нельзя отбросить. Достаточно рассмотреть двумерный случай, поскольку любое решение двумерной системы Навье–Стокса порождает решение системы Навье–Стокса в большей размерности добавлением нулевых компонент поля $\mathbf{u}$ и фиктивных переменных. При этом вырожденность начальных данных сохраняется. В двумерном же случае невырожденность является необходимым и достаточным условием для справедливости утверждения теоремы:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что $n = 2$ и начальные данные вырождены. Тогда для любого $t > 0$ и $k \geq 0$ имеем $\max |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|_{C^k(\mathbb{T}^2)} \leq \max |\mathbf{u}(0, \mathbf{x})|_{C^k(\mathbb{T}^2)}$ и $\nabla p \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В двумерном случае вырожденные векторные поля поддаются классификации. Вырожденность здесь равносильна бездивергентности и тождественному обращению в нуль определителя матрицы Якоби векторного поля. Первое условие влечет, что существует функция $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\operatorname{rot} \psi = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, где $\operatorname{rot} \psi = \begin{pmatrix} \partial \psi / \partial x_2 \\ -\partial \psi / \partial x_1 \end{pmatrix}$. Теперь второе условие

равносильно тому, что график функции ψ в $\mathbb{R}^3$ является поверхностью с тождественно нулевой гауссовой кривизной. Мы оказываемся в условиях теоремы о цилиндре: *Полная двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с тождественно нулевой гауссовой кривизной является обобщенным цилиндром, т.е. декартовым произведением некоторой прямой на некоторую кривую в ортогональной плоскости.* Эта теорема впервые была получена А. В. Погореловым [2, теорема 6] и несколько позже – Хартманом и Ниренбергом.

Применяя эту теорему, находим, что любое двумерное периодическое вырожденное векторное поле имеет вид:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} \varphi_0(b_1 x_1 + b_2 x_2) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

для некоторой функции $\varphi_0(\cdot)$ и вещественных чисел b_1, b_2, c_1 и c_2 . Подробнее см. [3, теорема 3]. В этом случае решение задачи Коши для уравнения (1) сохраняет свою форму:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} \varphi(t, b_1 x_1 + b_2 x_2) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

причем функция φ удовлетворяет линейному параболическому уравнению с постоянными коэффициентами: $\varphi_t + (b_1 c_1 - b_2 c_2) \varphi' = (b_1^2 + b_2^2) \nu \varphi''$. Значит, производные монотонно убывают и $\nabla p \equiv 0$. Предложение доказано.

Мы заметим, что в двумерном случае решения с вырожденными начальными данными описывают класс решений системы Навье–Стокса, для которых $\nabla p \equiv 0$. В одну сторону это следует из только что доказанного предложения, в другую – из тождества $\Delta p(t, x) = -2I_2(t, x)$, справедливого и в высших размерностях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Как мы покажем, утверждение теоремы справедливо для любых функций $\mathbf{u}$ и p , удовлетворяющих лишь системе (1) без условия бездивергентности (2). Доказательство основано на том факте, что если $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ – произвольное C^1 -гладкое векторное поле, периодическое по $\mathbf{x}$, такое, что начальные данные $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0, \mathbf{x})$ – невырожденное векторное поле, то существуют $T = T(\mathbf{u}_0)$ и $c = c(\mathbf{u}_0)$ такие, что

$$|\mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u} \mathbf{u}|_{C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n)} \geq c. \quad (4)$$

См. [3; теоремы 4, 5]. Если $T_0 \leq T(\mathbf{u}_0)$, то (3) получаем из того, что $|\mathbf{u}(t, \cdot)|_{L_\infty} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0$, тогда как среднее значение остается постоянным.

Если $T_0 > T(\mathbf{u}_0)$, то из (1) и (4) получаем

$$|\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p|_{C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n)} \geq c. \quad (5)$$

Если $|\nabla p|_{C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n)} \geq \frac{c}{2}$, т.е. для некоторого j выполняется неравенство $\left| \frac{\partial p}{\partial x_j} \right|_{C^0} \geq \frac{c}{2}$,

то $\left| \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{k-1} p \right|_{C^0} \geq \frac{c}{2\ell^{k-1}}$ при любом $k \geq 2$, что доказывает (3) в этом случае.

Предположим, что $|\nabla p|_{C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n)} < c/2$. В этом случае рассмотрим уравнение (1) как уравнение Бюргерса на $\mathbf{u}$ с ограниченной внешней силой ∇p . Применяя принцип максимума к этому уравнению, получаем $\sup_{[0, T] \times \mathbb{T}^n} |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})| \leq |\mathbf{u}_0|_{L_\infty} + cT/2$, тогда как из (5) следует, что $|\Delta \mathbf{u}|_{C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n)} > c/(2\nu)$. Экстраполируя последние два неравенства, получаем, что для каждого $k \geq 2$ справедливо неравенство

$$\max_{j=1, \dots, n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k \mathbf{u} \right|_{C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n)} \geq \frac{r_k}{\nu^{k/2}}$$

с некоторой ν -независимой положительной константой r_k .

Неравенство (3) доказано с $\varkappa_k = \min\{r_k, c/(2\ell^{k-1})\}$. Теорема доказана.

Автор благодарен профессору Сергею Борисовичу Куксину за постоянное внимание и поддержку в работе, а также Жаку Ружемону за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Kukavica, Z. Grujić // J. Funct. Anal. 1998. V. 152. № 2. P. 447–466. [2] А. В. Порогелов // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111. № 2. С. 945–947. [3] A. Biryuk. On multidimensional Burgers type equations with small viscosity // Submitted to J. Math. Pures Appl.; <http://www.mscme.ru/~biryuk>.