Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис, Приложения фробениусовых n -гомоморфизмов,
УМН, 2002, том 57, выпуск 1, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:15:15

ПРИЛОЖЕНИЯ ФРОБЕНИУСОВЫХ n -ГОМОМОРФИЗМОВ

В. М. БУХШТАБЕР, Э. Г. РИС

Для каждого линейного отображения алгебр $f: A \rightarrow B$ определено полилинейное отображение $\Phi_k(f): A^k \rightarrow B$ при помощи рекурсии Фробениуса ($\Phi_1 = f$):

$$\Phi_k(f)(a_1, \dots, a_k) = \Phi_1(a_1)\Phi_{k-1}(f)(a_2, \dots, a_k) - \sum_{j=2}^k \Phi_{k-1}(f)(a_2, \dots, a_1 a_j, \dots, a_k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Пусть A и B — алгебры с единицей. Отображение f называется фробениусовым n -гомоморфизмом, если $f(1) = n$ и $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$.

Результаты настоящей работы опираются на следующий наш результат [2]: *линейное отображение $f: \mathbb{C}[u_1, \dots, u_m] \rightarrow \mathbb{C}$ является фробениусовым n -гомоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такой набор точек $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ из $\mathbb{C}^m$, что $f(p) = p(\mathbf{x}_1) + \dots + p(\mathbf{x}_n)$.*

1. Для данных m и n рассмотрим отображение $g: \mathbb{C}^m \rightarrow \text{Sym}^n(\mathbb{C})$. Пусть $s_k: \text{Sym}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение, заданное k -м полиномом Ньютона $s_k[b_1, b_2, \dots, b_n] = b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k$. Обозначим через $\mathcal{N}_m$ полурешетку $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$. Для $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{N}_m$ положим $\mathbf{z}^\omega = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m}$ и $|\omega| = i_1 + i_2 + \dots + i_m$.

СВОЙСТВО 1. Композиция $s_k \circ g: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ задается формой $\sum_{|\omega|=k} \binom{k}{\omega} \alpha_\omega \mathbf{z}^\omega$ степени k для всех $k = 1, 2, \dots$, где $\binom{k}{\omega} = \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_m!}$.

Таким образом, если g обладает свойством 1, то формула $\Phi(\omega) = \alpha_\omega$ определяет отображение $\Phi: \mathcal{N}_m \rightarrow \mathbb{C}$.

Для $\omega = 0$ положим $\Phi(0) = n$, и, задавая $\Phi_1 = \Phi$, введем отображения $\Phi_\ell: \mathcal{N}_m^\ell \rightarrow \mathbb{C}$ для $\ell > 1$ при помощи следующей рекуррентной формулы:

$$\Phi_\ell(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\ell) = \Phi_1(\omega_1)\Phi_{\ell-1}(\omega_2, \dots, \omega_\ell) - \sum_{j=2}^{\ell} \Phi_{\ell-1}(\omega_2, \dots, \omega_1 + \omega_j, \dots, \omega_\ell).$$

СВОЙСТВО 2. Последовательность $\{\Phi_\ell\}$, соответствующая g , обрывается на $(n+1)$ -м шаге, т.е. $\Phi_{n+1}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \equiv 0$.

2. Пусть $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ — набор точек из $\mathbb{C}^m$.

Введем отображение $f_X: \mathbb{C}^m \rightarrow \text{Sym}^n(\mathbb{C})$ по формуле

$$f_X(\mathbf{z}) = [\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_n \rangle].$$

ТЕОРЕМА 1. Отображение g имеет вид f_X для некоторого набора X тогда и только тогда, когда g обладает свойствами 1 и 2.

Этот результат дает нетривиальное обобщение “аналога теоремы Пэли–Винера для комплексного преобразования Радона” (в терминологии [3]) на случай конечных мер.

3. Пусть

$$A(t, \mathbf{z}) = t^n - a_1(\mathbf{z})t^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n(\mathbf{z}),$$

где $a_k(\mathbf{z})$ — формы степени k . Корни $[t_1, \dots, t_n]$ уравнения $A(t, \mathbf{z}) = 0$ определяют отображение $f_A: \mathbb{C}^m \rightarrow \text{Sym}^n(\mathbb{C})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Отображение f_A имеет вид f_X , т.е. $[t_1, \dots, t_n] = [\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_n \rangle]$ и, следовательно, $A(t, \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n (t - \langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_i \rangle)$, тогда и только тогда, когда f_A обладает свойством 2.*

Таким образом, получен алгоритм проверки на разложимость полинома $A(t, \mathbf{z})$ в произведение линейных множителей. Из соотношения

$$\frac{d}{dt} \log A(t, \mathbf{z}) = \sum_{k \geq 0} t^{-k-1} s_k \circ f_A(\mathbf{z}) = \sum_{k \geq 0} t^{-k-1} \sum_{|\omega|=k} \binom{k}{\omega} \alpha_{\omega} \mathbf{z}^{\omega}$$

находим значения параметров α_{ω} , что определяет отображение Φ . Требуется проверить условие $\Phi_{n+1} \equiv 0$. Используем следующее явное выражение [1]:

$$\Phi_{\ell}(\omega_1, \dots, \omega_{\ell}) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \Phi_{\sigma}(\omega_1, \dots, \omega_{\ell}),$$

где σ пробегает группу перестановок S_{ℓ} . Разлагая σ в произведение циклов $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_q$, задаем $\Phi_{\sigma} = \Phi_{\gamma_1} \Phi_{\gamma_2} \cdots \Phi_{\gamma_q}$, и для $\gamma = (i_1, \dots, i_r) \subset (1, \dots, \ell)$ полагаем $\Phi_{\gamma}(\omega_1, \dots, \omega_{\ell}) = \Phi(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_r})$.

4. Пусть, как и выше, $a_n(\mathbf{z})$ – ненулевая форма степени n . Выберем точку $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ такую, что $a_n(\mathbf{y}) = 1$, и положим $A_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{z}) = a_n(\mathbf{z} + t\mathbf{y})$. Тогда

$$A_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{z}) = t^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) t^{n-k}.$$

Согласно следствию 1 полином $A_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{z})$ разлагается в произведение линейных множителей (и, следовательно, форма $a_n(\mathbf{z})$ имеет вид $\prod_{i=1}^n \langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_i \rangle$) тогда и только тогда, когда $f_{A_{\mathbf{y}}}$ обладает свойством 2. Таким образом, описанный выше алгоритм применим к решению задачи о разложении форм на линейные множители (см. [4]).

5. Рассмотрим алгебру Ли W_m формальных векторных полей на $\mathbb{C}^m$. Базис в W_m составляют поля $D_{\omega, j} = \mathbf{z}^{\omega} \frac{\partial}{\partial z_j}$.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра Ли W_m действует на функциях Φ_{ℓ} по формуле*

$$D_{\omega, j} \Phi_{\ell}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\ell}) = \sum_{k=1}^n \langle \omega_k, e_j \rangle \Phi_{\ell}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k + \omega - e_j, \dots, \omega_{\ell}),$$

где e_j – j -й орт.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для проверки свойства 2 достаточно ограничиться вычислением значений Φ_{n+1} только на представителях орбит действия обертывающей алгебры алгебры Ли W_m .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 159–160. [2] V. M. Buchstaber, E. G. Rees // uk.arXiv.org: math.CO/0109122. [3] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. (Обобщенные функции, вып. 5.) [4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Эдинбургский университет
E-mail: buchstab@mendeleevo.ru, elmer@maths.ed.ac.uk

Принято редколлегией
15.01.2002