Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, О накоплении собственных значений дифференциальных оператор-функций, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:10:02

О НАКОПЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

А. А. Владимир

Рассмотрим определенную на интервале $\Lambda = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ оператор-функцию $L(\lambda)$, порожденную в $L_2[0, 1]$ дифференциальным выражением

$$l(\lambda) = (-1)^n \left(\frac{y^{(n)}(x)}{p_0(x, \lambda)} \right)^{(n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (p_k(x, \lambda) y^{(n-k)}(x))^{(n-k)} \quad (1)$$

и самосопряженными краевыми условиями, которые запишем в матричном виде

$$A(\lambda) \mathcal{Y}(y) + B(\lambda) \mathcal{Z}(y) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{Y}(y)$, $\mathcal{Z}(y)$ — векторы из $\mathbb{C}^{2n}$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(y) &= (y^{[0]}(0) \ y^{[1]}(0) \ \dots \ y^{[n-1]}(0) \ y^{[0]}(1) \ y^{[1]}(1) \ \dots \ y^{[n-1]}(1))^T, \\ \mathcal{Z}(y) &= (y^{[n]}(0) \ y^{[n+1]}(0) \ \dots \ y^{[2n-1]}(0) \ y^{[n]}(1) \ y^{[n+1]}(1) \ \dots \ y^{[2n-1]}(1))^T, \end{aligned}$$

где квадратные скобки в показателе означают квазипроизводную (см. определение в [1; гл. 5]), а $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — матрицы размера $2n \times 2n$ такие, что ранг матрицы $(A(\lambda)|B(\lambda))$ равен $2n$.

Следующие условия предполагаем в дальнейшем выполненными всюду, включая формулировки теорем: коэффициенты $p_k(x, \lambda)$ вещественны, суммируемы на $[0, 1]$ и непрерывны по λ как отображения из Λ в $L_1[0, 1]$; при любом $\lambda \in \Lambda$ неравенство $p_0(x, \lambda) > 0$ выполнено для почти всех $x \in [0, 1]$; элементы матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ непрерывно зависят от λ ; величина $\text{rank } B(\lambda)$ постоянна на Λ . Существование последнего условия показано в [2].

Цель заметки составляет ответ на вопрос, является ли один из концов интервала Λ (например, β) точкой накопления спектра оператор-функции $L(\lambda)$.

Из теоремы 1 работы [2] вытекает следующий результат (через $\nu(S)$ здесь и далее обозначается кратность отрицательной части спектра оператора S):

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma_L(\Lambda)$ — спектр оператор-функции $L(\lambda)$ в интервале Λ (он состоит из собственных значений (СЗ), возможно, не изолированных). Тогда, если $\lim_{\lambda \rightarrow \beta} \nu(L(\lambda)) = +\infty$, то β является предельной точкой множества $\sigma_L(\Lambda)$.

В теореме 2 работы [2] сформулированы условия, гарантирующие убывание по $\lambda \in \Lambda$ собственных значений $\kappa_m(\lambda)$ оператора $L(\lambda)$, занумерованных в порядке возрастания с учетом кратности. Далее эти условия будем называть условиями монотонности.

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условий монотонности все СЗ оператор-функции $L(\lambda)$ изолированы, и β является точкой накопления СЗ оператор-функции $L(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\lambda \rightarrow \beta} \nu(L(\lambda)) = +\infty$.

Чтобы применять сформулированные общие теоремы при исследовании конкретных задач, надо иметь оценки кратности отрицательной части спектра операторов $L(\lambda)$. Для дифференциальных операторов второго порядка с разделенными краевыми условиями подобные оценки были получены в [3]. Мы приведем соответствующие результаты для простейших операторов четвертого порядка.

Пусть оператор-функция $L(\lambda)$ порождена выражением

$$\left(\frac{y''(x)}{p(x, \lambda)} \right)'' + q(x, \lambda) y(x) \quad (3)$$

и краевыми условиями вида (2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-01-01000, 96-15-96091).

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует точка $a \in (0, 1]$ такая, что функции $p(x, \lambda)$ и $q(x, \lambda)$ непрерывны как отображения из полуинтервала $(\alpha, \beta]$ в $L_{1,\text{loc}}([0, a] \cup (a, 1])$, причем $p(x, \beta) > 0$ почти всюду на $[0, 1]$. Тогда если при некотором вещественном ζ существуют конечные пределы

$$p_a := \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{p(x, \beta)|x - a|^\zeta}, \quad q_a := \lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x, \beta)}{|x - a|^{\zeta-4}},$$

причем

$$q_a < -\frac{1}{16}(\zeta - 1)^2(\zeta - 3)^2 p_a, \quad (4)$$

то β является точкой накопления СЗ оператор-функции $L(\lambda)$.

Если дополнительно выполнены условия монотонности, а неравенство (4) выполняется с заменой знака на противоположный, то β не является точкой накопления СЗ оператор-функции $L(\lambda)$.

В качестве примера приложения изложенных результатов к конкретной задаче рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda)$, порожденную выражением

$$(-(1 + \lambda\alpha(x))y''(x))'' - (\lambda\beta(x) + \lambda^2\rho(x))y(x), \quad (5)$$

где функции $\beta(x)$, $\rho(x)$ и $\alpha(x) > 0$ непрерывны, и краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0. \quad (6)$$

Взяв за область значений спектрального параметра интервал $(-\infty, -(\alpha_0)^{-1})$, где $\alpha_0 := \min_{x \in [0, 1]} \alpha(x)$, получим оператор-функцию рассматриваемого типа.

Предположим, что минимальное значение α_0 достигается функцией $\alpha(x)$ в единственной, причем внутренней, точке $x_0 \in [0, 1]$. Применяя теорему 3, получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие

$$\alpha(x) \in C^4(x_0), \quad \alpha''(x_0) = 0. \quad (7)$$

Тогда если

$$\beta(x_0) - \frac{1}{\alpha_0}\rho(x_0) < -\frac{3}{128}\alpha^{(\text{IV})}(x_0), \quad (8)$$

то $-(\alpha_0)^{-1}$ является точкой накопления СЗ оператор-функции $L(\lambda)$.

Если выполнены условия $\rho(x) \leq 0$ и (7), а неравенство (8) выполнено с заменой знака неравенства на противоположный, то $-(\alpha_0)^{-1}$ не является точкой накопления СЗ оператор-функции $L(\lambda)$.

Автор благодарит А. А. Шкаликова за постановку задач и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
 [2] А. А. Владимиров // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 3. С. 471–474. [3] R. Mennicken, H. Schmid, A. A. Shkalikov // Math. Nachr. 1998. V. 189. P. 157–170.

Принято редколлегией
26.12.2001