Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^k$ -пространств в CW -комплексы, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:53:32

ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ $\mathbb{Z}_p^k$ -ПРОСТРАНСТВ В CW -КОМПЛЕКСЫ

А. Ю. ВОЛОВИКОВ

1. Пусть X – пространство с действием p -тора $G = \mathbb{Z}_p^k = \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p$ (k слагаемых), где p – простое число. Положим $q = p^k = |G|$. Для заданного непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ положим $A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \ \forall g \in G\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что X – связный CW -комплекс с G -действием такой, что $H^j(X) = 0$ при $1 \leq j \leq n-1$. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение в m -мерный CW -комплекс Y и $n \geq mq$. Тогда множество $A(f)$ непусто.*

Здесь и далее используются когомологии Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$.

Для $G = \mathbb{Z}_2$ и $X = S^n$ этот результат был установлен в [1] и в частном случае – в [2]. Позже случай $G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^n$, рассматривался также в [3]. Случай $G = \mathbb{Z}_p$, p – простое число, $X = S^n$ рассмотрен в [4], [5].

В [6] был введен индекс $i(X)$ – функция на G -пространствах, принимающая целые положительные значения или ∞ . Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $X_G = E_G \times_G X \rightarrow B_G$ со слоем X , B_G – классифицирующее пространство, $E_G \rightarrow B_G$ – универсальное главное G -расслоение. Она сходится к эквивариантным когомологиям $H_G^*(X) = H^*(X_G)$, см. подробнее [7]. Положим $\Lambda^* = H_G^*(pt) = H^*(B_G)$. Пусть X связно. Тогда $E_2^{*,0} = \Lambda^*$. Предположим, что $E_2^{*,0} = \cdots = E_s^{*,0} \neq E_{s+1}^{*,0}$. По определению $i(X) = s$.

Приведем некоторые свойства индекса, см. [6]. Если $G = \mathbb{Z}_2$ и X – свободное G -пространство, то индекс $i(X)$ на 1 больше гомологического индекса Янга [8]. Если существует G -отображение из X в Z , то $i(X) \leq i(Z)$. Если X – компактная когомологическая сфера, $H^*(X) = H^*(S^n)$, на которой G действует без неподвижных точек, то $i(X) = n + 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение CW -комплекса X с G -действием в m -мерный CW -комплекс Y . Предположим, что $i(X) \geq mq + 1$. При $i(X) = mq + 1$ пусть $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда множество $A(f)$ непусто.*

Утверждение справедливо и в случае, когда X и Y – компактные пространства и $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$ (когомологическая размерность над полем $\mathbb{Z}_p$).

Условие относительно f^* , вообще говоря, нельзя отбросить.

Неравенство в теореме 2 также не может быть ослаблено, что вытекает из нижеследующего предложения, в котором через $J^{mq}(G)$ обозначается джойн mq экземпляров группы G , рассматриваемый с диагональным действием, и T – триод (конус над тремя точками).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для каждого m существует отображение $\theta_m: J^{mq}(G) \rightarrow T^m$ такое, что $A(\theta_m) = \emptyset$.*

При $G = \mathbb{Z}_2$ получается не склеивающее антиподов отображение сферы S^{2m-1} в стягиваемый полиэдр T^m . Существование такого сорта отображений было обнаружено в [1] и [2] и позже переоткрыто в [3], [9]. Для конечных групп G , отличных от p -торов при $N > m|G|$, вообще говоря, существуют отображения $f: J^N(G) \rightarrow T^m$ с $A(f) = \emptyset$.

Теорема 2 вытекает из рассмотрения G -отображения $\hat{f}: X \rightarrow Y^q$, см. [11] (которое для $G = \mathbb{Z}_p$ использовалось в [3], [9], [10]), с помощью следующей леммы.

ЛЕММА. *Пусть X и Z – связные паракомпактные G -пространства, $f: X \rightarrow Z$ – G -отображение. Пусть $i(X) = i(Z) = n + 1$. Тогда $0 \neq f^*: H^n(Z) \rightarrow H^n(X)$.*

2. Пусть G' – конечная группа, $|G'| = q'$, $X - G'$ -пространство. Для $f: X \rightarrow Y$ и подгруппы $H \subset G'$ определим $A(f; H, G') \subset X$ как множество таких $x \in X$, что f постоянно на лобой H -орбите Hx точки $x \in G'x$. Объединение множеств $A(f; H, G')$ по всем нетривиальным

подгруппам обозначим через $B(f)$. Пусть G' содержит в качестве подгруппы p -тор G . Тогда X является также G -пространством и поэтому определен его индекс $i(X)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X компактно, связно и $i(X) \geq m|G'| + 1 = mq' + 1$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $i(X) = mq + 1$ пусть $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда $B(f) \neq \emptyset$.

3. В случае, когда $G = \mathbb{Z}_p$ — циклическая группа простого порядка p , имеется несимметричный аналог приведенных утверждений.

Пусть N — замкнутое n -мерное топологическое многообразие со свободным действием группы G . При $p > 2$ предположим, что N ориентируемо. Пусть заданы компактные пространства L и Y (с тривиальным действием G) и два отображения $g: L \rightarrow Y$ и $h: L \rightarrow N$. Определим $A(g, h) \subset L^p$ как множество таких точек $z = (x_1, \dots, x_p) \in L^p$, что $g(x_{i+1}) = g(x_1)$, $h(x_{i+1}) = T^i h(x_1)$ при $i = 1, 2, \dots, p-1$, где T — образующая группы G .

ТЕОРЕМА 4. Пусть L и Y — компактные пространства и $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y = m$. Предположим, что $i(N) = n+1$ и $0 = g^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(L)$. Пусть $n \geq mp$ и $0 \neq h^*: H^n(N) \rightarrow H^n(L)$. Тогда $A(g, h) \neq \emptyset$.

Доказательство теоремы 4 основано на следующем аналоге приведенной выше леммы (для $G = \mathbb{Z}_2$ это — частный случай теоремы 4.6 в [12]):

Пусть X и Z — связные паракомпактные свободные G -пространства, где $G = \mathbb{Z}_p$, и $f: X \rightarrow Z$ — эквивариантное отображение. Предположим, что $\text{ind } X = \text{ind } Z = n$. Тогда гомоморфизм $f^*: H^n(Z) \rightarrow H^n(X)$ нетривиален.

Здесь ind — индекс, определяющийся с помощью последовательностей Смита (в [12] он обозначается через $\text{co-ind}_{\mathbb{Z}_p}$).

4. Пусть $F: X \rightarrow Y$ — многозначное отображение вида $F = f \circ \pi^{-1}$, где $\pi: Z \rightarrow X$ и $f: X \rightarrow Y$, и X, Y и Z компактны. Будем предполагать, что π — сюръективное ациклическое (векторисово) над полем $\mathbb{Z}_p$ отображение (т.е. слои отображения π связны и ациклически над $\mathbb{Z}_p$). Положим $A(F) = \{x \in X \mid \bigcap_{g \in G} F(gx) \neq \emptyset\}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X компактно, связно и $i(X) \geq mq + 1$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $i(X) = mq + 1$ пусть $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Предположим, что $\pi: Z \rightarrow X$ сюръективно и ациклично над $\mathbb{Z}_p$. Тогда $A(F) \neq \emptyset$.

Автор благодарит Е. Г. Складенко и Е. В. Щепина за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Щепин // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. №1. С. 42–43. [2] М. И. Стесин // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. №1. С. 31–33. [3] М. Izydorek, J. Jaworowski // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 191–195. [4] D. L. Gonsalves, P. Q. L. Pergher // Kobe J. Math. 1998. V. 217. №1. P. 191–195. [5] J. Jaworowski // Kobe J. Math. 2000. V. 217. P. 191–195. [6] А. Ю. Воловиков // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 3–22. [7] W. Y. Hsiang. Cohomology Theory of Topological Transformation Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1975. [8] C. T. Yang // Ann. of Math. 1954. V. 60. P. 262–282. [9] J. Väisälä // Topology. 1981. V. 20. P. 319–322. [10] А. С. Шварц // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 99–126. [11] А. Ю. Воловиков // Матем. сб. 1992. Т. 183. №7. С. 115–144. [12] P. E. Conner, E. E. Floyd // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 416–441.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: avolov@mi.ras.ru

Принято редколлегией
26.12.2001