Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, С. М. Саматов, Условия конечности дискретного спектра гамиль-
тониана системы трех произвольных частиц на решетке, *УМН*, 2002, том 57,
выпуск 1, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:29:15

**УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО
СПЕКТРА ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ ТРЕХ
ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ**

С. Н. ЛАКАЕВ, С. М. САМАТОВ

Конечность дискретного спектра для трехчастичного непрерывного оператора Шрёдингера изучены во многих работах [1]–[3]. Некоторые условия конечности числа связанных состояний вне существенного спектра гамильтониана системы трех одинаковых частиц установлены в [4].

В настоящей работе установлены условия конечности числа связанных состояний вне существенного спектра для гамильтониана системы трех произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения на решетке. Описана структура и местоположения существенного спектра.

Пусть $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор, $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^3$.

В импульсном представлении гамильтониан H системы трех произвольных квантовых частиц действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ и имеет вид:

$$(Hf)(k_1, k_2, k_3) = (H_0f)(k_1, k_2, k_3) - \sum_{\alpha=1; \alpha \neq \beta, \gamma}^3 \mu_\alpha \iiint \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3.$$

Здесь $(H_0f)(k_1, k_2, k_3) = (\varepsilon_1(k_1) + \varepsilon_2(k_2) + \varepsilon_3(k_3))f(k_1, k_2, k_3)$, $\varepsilon_\alpha(p) = \ell_\alpha \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)})$, $p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbb{T}^3$, $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$ – энергия взаимодействия частиц β и γ , $\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака, $m_\alpha = (\ell_\alpha)^{-1}$ – масса частицы; индексы α, β и γ различны и принимают значения 1, 2, 3. Интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всему тору $\mathbb{T}^3$.

Пусть $K = k_1 + k_2 + k_3$ – полный квазиимпульс системы трех частиц.

Если перейти к переменным $K = k_1 + k_2 + k_3$, $k_1 = p$, $k_2 = q$, то оператор H является прямым операторным интегралом семейства операторов $\{H(K), K \in \mathbb{T}^3\}$, действующих при каждом $K \in \mathbb{T}^3$ в пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле (см. [5])

$$(H(K)f)(p, q) = (H_0(K)f)(p, q) - \mu_1 \int f(p, q') dq' - \mu_2 \int f(q', q) dq' - \mu_3 \int f(q', p+q-q') dq',$$

где $(H_0(K)f)(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q)$, $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(q) + \varepsilon_3(K - p - q)$, $K \in \mathbb{T}^3$. Рассмотрим гамильтониан $H_\alpha(K)$, соответствующий системе трех частиц, где взаимодействуют только частицы β и γ , действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$H_\alpha(K)f(p, q) = \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q)f(p, q) - \mu_\alpha \int f(p, q') dq',$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) = \varepsilon_\alpha(p) + \varepsilon_\beta(q) + \varepsilon_\gamma(K - p - q)$, $K \in \mathbb{T}^3$. Оператор $H_\alpha(K)$ разлагается в прямой операторный интеграл семейства операторов $\{H_\alpha(K, p), p \in \mathbb{T}^3\}$, действующих при каждом $K, p \in \mathbb{T}^3$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле (см. [5]) $H_\alpha(K, p)f(q) = \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q)f(q) - \mu_\alpha \int f(q') dq'$.

Пусть $m_K = \min_{p, q \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_K(p, q)$, $M_K = \max_{p, q \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_K(p, q)$. Обозначим

$$\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q), \quad \mu_0^{(\alpha)}(K) = \max_{p \in \mathbb{T}^3} \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)} \right)^{-1},$$

$$\mu_{\min}^{(\alpha)}(K) = \max_{p \in \mathbb{T}^3} \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - m_K} \right)^{-1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если уравнение $H_\alpha(K, p)\psi(q) = \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)\psi(q)$, $K, p \in \mathbb{T}^3$, имеет нетривиальное решение в пространстве $L_\tau(\mathbb{T}^3)$ при некотором $\tau \in [1, 3/2)$, то говорят, что оператор $H_\alpha(K, p)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра (см. [3], [5]).

Пусть G_{μ_α} – некоторая область и Γ_{μ_α} – граница замкнутого множества $\mathbb{T}^3 \setminus G_{\mu_\alpha}$.

ЛЕММА. а) Пусть $\mu_\alpha \in (0, \mu_0^{(\alpha)}(K))$. Тогда для любого $K \in \mathbb{T}^3$ существует область $G_{\mu_\alpha} \subset \mathbb{T}^3$ и при всех $p \in G_{\mu_\alpha}$ оператор $H_\alpha(K, p)$ имеет единственное собственное значение $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p)$, причем $0 < E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p) < \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)$.

б) Пусть $\mu_\alpha = \mu_0^{(\alpha)}(K)$. Тогда для любого $K \in \mathbb{T}^3$ оператор $H_\alpha(K, 0)$ имеет виртуальный уровень на левом краю непрерывного спектра и для любого $p \in \mathbb{T}^3 \setminus \{0\}$ оператор $H_\alpha(K, p)$ имеет единственное собственное значение $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p)$ и $0 < E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p) < \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)$.

в) Пусть $\mu_\alpha \in (\mu_0^{(\alpha)}(K), \mu_{\min}^{(\alpha)}(K)]$. Тогда для любого $K \in \mathbb{T}^3$ существует область G_{μ_α} и при всех $p \in G_{\mu_\alpha}$ оператор $H_\alpha(K, p)$ имеет единственное собственное значение $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p)$, причем $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p) < 0$. При всех $p \in \mathbb{T}^3 \setminus G_{\mu_\alpha}$ оператор $H_\alpha(K, p)$ имеет единственное собственное значение $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p)$ и $0 < E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p) < \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)$.

г) $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p) = 0$ есть виртуальный уровень оператора $H_\alpha(K, p)$ при всех $p \in \Gamma_{\mu_\alpha}$.

д) Пусть $\mu_\alpha > \mu_{\min}^{(\alpha)}(K)$. Тогда для любых $K, p \in \mathbb{T}^3$ оператор $H_\alpha(K, p)$ имеет единственное отрицательное собственное значение $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p) < 0$.

Пусть $\text{Im } E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, G_{\mu_\alpha})$ – образ множества G_{μ_α} относительно отображения $E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K)$, а $e_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K)$ ($E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K)$) – его нижняя (соответственно верхняя) грань и $e(K) = \min_\alpha e_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K)$.

ТЕОРЕМА 1. а) Пусть для любого $\alpha = 1, 2, 3$ выполнены неравенства $0 < \mu_\alpha < \mu_0^{(\alpha)}(K)$. Тогда существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из отрезка $[m_K, M_K]$.

б) Пусть для любого $\alpha = 1, 2, 3$ имеют место неравенства $\mu_0^{(\alpha)}(K) < \mu_\alpha < \mu_{\min}^{(\alpha)}(K)$. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ состоит из отрезка $[e(K), M_K]$.

в) Пусть для любого $\alpha = 1, 2, 3$ выполнены неравенства $\mu_\alpha > \mu_{\min}^{(\alpha)}(K)$. Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^3 \sigma(H_\alpha(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^3 [e_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K), E_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K)] \cup [m_K, M_K].$$

Обозначим через $W_\delta(0) \subset \mathbb{T}^3$ некоторую достаточно малую δ -окрестность нуля.

ТЕОРЕМА 2. Если для некоторых α и β выполнены неравенства $\mu_\alpha \neq \mu_0^{(\alpha)}(K)$ и $\mu_\beta \neq \mu_0^{(\beta)}(K)$ при $K \in W_\delta(0)$, то дискретный спектр оператора $H(K)$ развет лишь конечен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что если $\mu_\alpha = \mu_0^{(\alpha)}(K)$, $\mu_\beta = \mu_0^{(\beta)}(K)$, $\mu_\gamma \in (0, \mu_0^{(\gamma)}(K)]$, то дискретный спектр оператора $H(K)$ бесконечен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. М. Жислин // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. №1. С. 25–28. [2] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982. [3] Д. К. Яфаев // ТМФ. 1975. Т. 25. С. 185–195. [4] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев // ТМФ. 1997. Т. 111. №1. С. 94. [5] С. Н. Лакаев // Функци. анализ и его прил. 1993. Т. 27. №3. С. 15–28.