Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 03:35:59

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИГАМИЛЬТОНОВЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

О. И. Мохов

В данной заметке построена иерархия интегрируемых бигамильтоновых систем, обладающих парой согласованных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа (согласованных скобок Дубровина–Новикова [1]) и задаваемых произвольными решениями нелинейной системы уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния и описывающей все согласованные локальные скобки Пуассона гидродинамического типа.

Напомним, что локальной заменой координат произвольная пара согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова P_1^{ij} и P_2^{ij} , один из которых (допустим P_2^{ij}) невырожденный, приводится к следующему специальному виду:

$$P_2^{ij}[v(x)] = \eta^{ij} \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

$$P_1^{ij}[v(x)] = \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k, \quad (2)$$

где (η^{ij}) – произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица: $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$; $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, – гладкие функции, заданные в некоторой области локальных координат, такие, что оператор (2) является гамильтоновым (см. [2], [3]). При этом оператор вида (2) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда

$$\eta^{sr} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^i} \frac{\partial^2 h^k}{\partial v^l \partial v^r} = \eta^{sr} \frac{\partial^2 h^k}{\partial v^s \partial v^i} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^l \partial v^r}, \quad (3)$$

$$\left(\eta^{ip} \frac{\partial h^s}{\partial v^p} + \eta^{sp} \frac{\partial h^i}{\partial v^p} \right) \eta^{jl} \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^l \partial v^s} = \left(\eta^{jp} \frac{\partial h^s}{\partial v^p} + \eta^{sp} \frac{\partial h^j}{\partial v^p} \right) \eta^{il} \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^l \partial v^s} \quad (4)$$

(см. [2]–[5]). Система нелинейных уравнений (3), (4), как и предполагалось в работах автора [4], [5], где были высказаны соответствующие гипотезы, является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Процедура интегрирования этой системы была предложена в работе автора [6], [7], а в работе [8] была указана для нее пара Лакса. Отметим, что уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля (см. [2]) являются естественной редукцией уравнений (3) для “потенциальных” векторных полей $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, специального вида $h^i(v) = \eta^{ij} \partial \Phi / \partial v^j$, где $\Phi(v)$ – некоторая гладкая функция (“потенциал”) (см. также [3]–[5], [9]).

Рассмотрим оператор рекурсии, задаваемый “каноническими” согласованными гамильтоновыми операторами Дубровина–Новикова (1), (2):

$$R_l^i = [P_1[v(x)](P_2[v(x)])^{-1}]_l^i = \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \eta_{jl} \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1}, \quad (5)$$

где (η_{ij}) – матрица, обратная по отношению к матрице (η^{ij}) : $\eta^{is} \eta_{sj} = \delta_j^i$. Применим полученный нами оператор рекурсии (5) к системе трансляций по x , т.е. системе гидродинамического типа $v_t^i = v_x^i$, которая, очевидно, является гамильтоновой с гамильтоновым оператором (1):

$$v_t^i = v_x^i \equiv P_2^{ij} \frac{\delta H}{\delta v^j(x)}, \quad H = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x) dx. \quad (6)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00010) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

Любая система из иерархии

$$v_{t_n}^i = (R^n)_j^i v_x^j, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

является мультигамильтоновой интегрируемой системой.

В частности, интегрируемой является любая система вида $v_{t_1}^i = R_j^i v_x^j$, т.е. система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \eta_{jl} v^l \\ &\equiv \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jk} + \frac{\partial h^i}{\partial v^k} + \eta^{is} \eta_{jl} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v^l \right) v_x^k \equiv \left(h^i(v) + \eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jl} v^l \right)_x, \end{aligned} \quad (8)$$

где $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, – произвольные решения интегрируемой системы (3), (4).

Эта система гидродинамического типа бигамильтонова с парой “канонических” гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова (1), (2):

$$v_{t_1}^i = \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \frac{\delta H_1}{\delta v^j(x)}, \quad H_1 = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x) dx, \quad (9)$$

$$v_{t_1}^i = \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta v^j(x)}, \quad H_2 = \int \eta_{jk} h^k(v(x)) v^j(x) dx. \quad (10)$$

Следующей системой в иерархии (7) является интегрируемая система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v_{t_2}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \eta_{jl} \left(h^l(v) + \eta^{lp} \frac{\partial h^r}{\partial v^p} \eta_{rq} v^q \right) \\ &\equiv \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \left(\eta_{jl} \frac{\partial h^l}{\partial v^k} + \eta_{rk} \frac{\partial h^r}{\partial v^j} + \eta_{rq} v^q \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^j \partial v^k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} \left(\eta_{jl} h^l(v) + \eta_{rq} v^q \frac{\partial h^r}{\partial v^j} \right) \right) v_x^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Иерархия интегрируемых систем (7) является “канонической” для всех бигамильтоновых систем гидродинамического типа, обладающих парой согласованных локальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа. Полностью аналогичная явная конструкция класса интегрируемых бигамильтоновых систем построена нами и в случае нелокальных согласованных гамильтоновых операторов гидродинамического типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
 [2] В. Dubrovin // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; arXiv: hep-th/9407018.
 [3] О. И. Мохов // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172. [4] О. И. Мохов // Тр. МИРАН. 1999. Т. 225. С. 284–300. [5] О. И. Mokhov // Reports Math. Physics. 1999. V. 43. № 1/2. P. 247–256.
 [6] О. I. Mokhov. arXiv: math.DG/0005081. [7] О. И. Мохов // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 221–222. [8] Е. V. Ferapontov. arXiv: math.DG/0005221. [9] О. И. Мохов // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 153–154.

Центр нелинейных исследований
 при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Принято редколлегией
 13.12.2001