Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, Следы операторов,
УМН, 2006, том 61, выпуск 5, 89–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 07:10:28

УДК 517.984

Следы операторов

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

Настоящий обзор посвящен истории и современному состоянию теории регуляризованных следов линейных операторов. Основное внимание уделено операторам с дискретным спектром. Несколько дополнений посвящены некоторым смежным разделам спектральной теории и постановке ряда важных нерешенных задач.

Библиография: 183 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	89
Регуляризованные следы. Обыкновенные дифференциальные операторы.	96
Регуляризованные следы. Общая теория	117
Дополнение 1. Функция спектрального сдвига и формула Крейна	132
Дополнение 2. ζ -функция, θ -функция, некоммутативный вычет и спектральная асимметрия	137
Дополнение 3. Теория индекса линейных операторов	140
Дополнение 4. О приближенном вычислении первых собственных чисел .	141
Дополнение 5. Некоторые другие результаты	144
Дополнение 6. Некоторые нерешенные задачи	146
Список литературы	148

Введение

Теория следов линейных операторов начинается с фундаментального результата линейной алгебры: матричный след линейного оператора инвариантен относительно выбора базиса и совпадает со спектральным следом.

Роль этого инварианта и его следствий в различных разделах алгебры, анализа, геометрии очень большая. Наша цель — дать обзор той части современной теории операторов в гильбертовом пространстве, которая была рождена в поиске аналогов инвариантного следа для операторов, заведомо не имеющих следа в обычном смысле.

Однако, вначале конечномерный результат был перенесен на случай бесконечномерных операторов со следом – так называемых ядерных операторов¹, а именно, было доказано (см. [1]), что если оператор A – ядерный, то для любой пары $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty})$ ортонормированных базисов верно

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A\psi_n, \psi_n) \quad (1)$$

и также верно равенство, известное как теорема В. Б. Лидского [2],

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_n \lambda_n, \quad (2)$$

где $\{\lambda_n\}$ – все собственные числа оператора A (если A не имеет собственных чисел, то в правой части (2) стоит 0). Этими результатами классическая теория была завершена, так как здесь в максимальной общности охвачен весь класс операторов со следом, и с этого места начинается теория регуляризованных следов линейных операторов.

По-видимому, первые результаты, положившие начало теории регуляризованных следов операторов, получил в 1947–52 годах И. М. Лифшиц (завершающая работа цикла [3], там можно найти дальнейшие ссылки), рассмотревший задачу о вычислении следа оператора $F(L + \Lambda) - F(L)$, где L – невозмущенный эрмитов оператор, Λ – конечномерный оператор возмущения, а $F(x)$ – некоторая (принадлежащая достаточно широкому классу) функция. Оказалось, формулы регуляризованных следов имели физический смысл: И. М. Лифшиц с помощью своей формулы посчитал изменение свободной энергии кристалла при внедрении в него чужеродной примеси. Смысл регуляризованного следа как меры дефекта полной энергии системы при ее возмущении в ситуации, когда сама полная энергия системы (точнее, рассматриваемой модели) бесконечна, является одним из важнейших критериев при оценке содержания полученных теорией результатов, хотя и далеко не единственным.

Первые результаты И. М. Лифшица относились к случаю оператора L со спектром произвольной природы и были им применены к оператору с непрерывным спектром. Замечательное развитие этих результатов было сделано М. Г. Крейном [4], в дальнейшем этот раздел теории регуляризованных следов успешно развивался, ему и его приложениям было посвящено несколько обзоров и разделов монографий (см., например, [5], [6]), и мы не видим необходимости вновь подробно рассматривать это направление, ограничившись обзором в дополнении 1 наиболее важных работ и тех аспектов этой теории, которые не отражены в имеющейся литературе.

¹ s -числами компактного оператора A называются упорядоченные по убыванию собственные числа положительного оператора $\sqrt{AA^*}$. Множество компактных операторов, s -числа которых образуют сходящийся ряд $\sum s_n^p$ при некотором $p > 0$, традиционно обозначается $\mathfrak{S}_p$; при $p \geq 1$ это множество образует симметрично-нормированный идеал в алгебре всех ограниченных операторов с нормой $\|\cdot\|_p = (\sum s_n^p)^{1/p}$. При $p = 1$ эта норма называется ядерной нормой операторов, при $p = 2$ – нормой Гильберта–Шмидта или абсолютной нормой. Подробное изложение теории симметрично-нормированных идеалов см. в [1].

Основной нашей целью будет история развития теории регуляризованных следов дискретных² операторов и той части теории для операторов с непрерывным спектром, которая по идеологии и техническому аппарату ближе теории для дискретных операторов.

Началом этого раздела теории регуляризованных следов операторов стала работа И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [7], в которой для оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0, \quad (3)$$

$q(x) \in C^1[0, \pi]$, при условии³ $\int_0^\pi q(x) dx = 0$ была получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)), \quad (4)$$

здесь μ_n – собственные числа оператора (3), а $\lambda_n = n^2$ – собственные числа такого же оператора с $q(x) \equiv 0$.

Эта формула породила большую и очень важную теорию, начавшуюся с исследования конкретных операторов и в дальнейшем охватившую изучение регуляризованных следов дискретных операторов в общем виде.

Для дискретных операторов на первый взгляд естественна (в соответствии с общими идеями регуляризации расходящихся рядов) следующая постановка задачи обобщения понятия следа: при расходимости ряда из матричных элементов оператора доказать как аналог формулы (1) соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ((A\varphi_n, \varphi_n) - (A\psi_n, \psi_n)) = 0, \quad (5)$$

однако легко заметить, что без существенных уточнений в постановке вопроса формулы (1) и (5) равносильны. Это следует из простого факта теории числовых рядов: если ряд из матричных элементов расходится в каком-то базисе $\{\varphi_n\}$, то существует такая перенумерация векторов этого базиса, которую можно принять за другой базис $\{\psi_n\}$, что ряд (5) расходится. Отсюда следует, что для любых неядерных операторов A равенство (5) не может быть верно для любых пар базисов. Таким образом, разумная постановка основной задачи принимает вид: **указать класс операторов A и соответствующий класс пар базисов $(\{\varphi_n\}, \{\psi_n\})$, для которых верна инвариантность следа в смысле (5).**

Эта постановка задачи выдвигает на первый план следующую: **выбор базисов** – хотя ясно, что второй из этих базисов должен быть в каком-то смысле близок к первому, но выбор первого базиса для разных классов операторов неочевиден, и для содержательной постановки задачи этот выбор базиса должен быть обусловлен вескими внутренними причинами.

Для дискретных операторов естественной идеей, направлявшей выбор базисов, являлась спектральная формулировка следа (2): в качестве одного из

² Дискретным называется оператор, имеющий компактную резольвенту.

³ Условие равенства нулю среднего от потенциала не является ограничительным, так как всегда может быть достигнуто сдвигом спектра на константу.

базисов выбирается базис из собственных векторов оператора A – разумеется, в предположении, что он есть, а для определения второго базиса оператор “расщепляется” в сумму двух⁴: $A = A_0 + B$, причем предполагается подчиненность оператора B оператору A_0 , и формула (5) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ((A\varphi_n, \varphi_n) - (A\psi_n, \psi_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n - \mu_n + (B\varphi_n, \varphi_n)) = 0, \quad (6)$$

где $\{\varphi_n\}$ – базис из собственных векторов оператора A_0 с собственными числами $\{\lambda_n\}$, $\{\psi_n\}$ – базис из собственных векторов оператора A с собственными числами $\{\mu_n\}$, а **степень подчиненности оператора B оператору A_0 по сути является мерой близости базисов.**

Укажем здесь на важное, часто встречающееся в приложениях обстоятельство – в общем положении мы вынуждены рассматривать суммирование в (6) со скобками, так как если оператор A_0 имеет кратное собственное число, то в соответствующем инвариантном подпространстве у нас нет приоритетного выбора базиса и вновь простая перенумерация векторов может привести нас к потере смысла задачи, причем в силу симметрии основной формулы (5) мы должны рассматривать как единое целое след конечномерной части оператора, действующей в сумме подпространств, отвечающих пусть различным, но близким (в смысле данного возмущения: мы должны учитывать, что в рассматриваемом классе возмущений существует такое, что при нем эта группа собственных чисел сольется в одно высокочастотное) собственным числам⁵.

Итак, **первая основная задача** теории регуляризованных следов – установить пределы справедливости обобщенной инвариантности следа, представленной формулой (6).

Вторая основная задача теории регуляризованных следов – для случаев неинвариантности следа в смысле (6) определить меру этой неинвариантности, найдя дальнейшие поправки к общему члену ряда (6), превращающие его в сходящийся ряд. Дело в том, что величина $(B\varphi_n, \varphi_n)$ хорошо известна еще из конечномерной теории возмущений дискретного спектра – это первая поправка теории возмущений для изолированного собственного числа. Поэтому, на формулу (6) можно смотреть следующим образом: *среднее отклонение собственных чисел при возмущении “равно” сумме первых поправок*. Если операторы таковы, что формула (6) не имеет места, то возникает следующая задача: можно ли конечным числом поправок, и каким минимально, достичь аналогичного эффекта?

Третья основная задача теории регуляризованных следов – для конкретных операторов математической физики (обычно это дифференциальные, псевдодифференциальные и интегральные операторы⁶) выделить из регуляризатора “точную” расходящуюся часть, выраженную в терминах собственных чисел невозмущенного оператора, и суммировать сходящийся остаток к конечному выражению, содержащему только функционалы от операторов A_0 и B . Как

⁴“... производится разделение оператора ... на две части, одна из которых должна быть простой, а другая малой” (П. А. М. Дирак. “Принципы квантовой механики”).

⁵Мы более не будем мотивировать необходимость и способы расстановки скобок, ограничиваясь описанием получающейся расстановки в конкретных задачах.

⁶в дальнейшем ДО, ПДО и ИО.

правило, полученный ответ (*также называемый регуляризованным следом*) содержит нетривиальную информацию о возмущенной системе.

В исторической ретроспективе отметим, что в начале развития теории в основном решалась именно третья из сформулированных задач: содержательный раздел математической физики и должен стартовать с изучения важных в приложениях операторов. При этом разработанные методы “автоматически” давали разложение регуляризатора на сходящееся и расходящееся слагаемые. То, что при этом решалась и первая задача, часто оставалось вне поля зрения авторов, частичным исключением являются работа Л. А. Дикого [8], несколько основанных на ней работ К. Хальберга, В. Крамера и Р. Гилберта (см. [9] и там дальнейшие ссылки) и работа М. Г. Гасимова [10].

Для теории регуляризованных следов операторов со спектром произвольной природы аналогом постановки задачи (5) явилась задача о вычислении следа операторного интеграла Стильтеса по мере, являющейся разностью спектральных семейств двух различных операторов. Так, в своих работах И. М. Лифшиц исследовал формальное равенство

$$\text{Tr}(F(L + \Lambda) - F(L)) = \text{Tr} \int F(\lambda) d(E'_\lambda - E_\lambda) = \int F(\lambda) d \text{Tr}(E'_\lambda - E_\lambda), \quad (7)$$

где символами E_λ и E'_λ обозначены соответственно разложения единиц операторов L и $L + \Lambda$. С естественной корректировкой все три задачи теории сохраняют свой смысл и в этом случае.

С нашей точки зрения, историю теории регуляризованных следов можно в настоящий момент разделить на два периода развития, в соответствии с которыми мы и разбили основной текст работы на две части, а уже в рамках этих частей мы старались объединять обсуждаемые работы по близости задач, методов и используемой технике.

Первый период: с начала 1950-х годов и до конца 1970-х. В это время на примере простейших операторов, в первую очередь Штурма–Лиувилля, были предложены основные постановки и многочисленные идеи и методы решения задач, сформировались центральные направления исследований.

Начиная с середины 1960-х годов, в первую очередь с появлением в работе В. Б. Лидского и В. А. Садовниченко [11] первого в теории общего метода нахождения регуляризованных следов широкого класса обыкновенных ДО, а также многих задач со сложным вхождением спектрального параметра, этот период находился в фазе бурного развития. Метод Лидского–Садовниченко обладает вычислительной законченностью, и в теории следов дискретных операторов он надолго захватил лидирующую роль, немало работ по его развитию и применению продолжает выходить и в настоящее время, и мы включили обзор таких работ в первую часть.

Также начиная с середины 1960-х годов, после выхода работы Л. Д. Фаддеева [12] и особенно работы В. С. Буслаева и Л. Д. Фаддеева [13] бурно развивалась и теория регуляризованных следов ДО, возникающих в теории рассеяния и имеющих непрерывный спектр.

В эти же временные рамки попал и большой цикл работ, связанный с развитием метода обратной задачи решения некоторых классических нелинейных

эволюционных уравнений. После того, как в работе В. Е. Захарова и Л. Д. Фаддеева [14] на примере уравнения Кортевега–де Фриза было показано, что формулы следов некоторых возникающих в этом методе операторов интерпретируются как первые интегралы соответствующих рассматриваемым эволюционным уравнениям бесконечномерных гамильтоновых систем, почти не было работы по этой тематике, в которой бы не находились формулы следов. Ввиду необозримости этих результатов мы, за редким исключением, ограничимся ссылками на монографии, в которых эта тема обсуждается подробно и имеется достаточная библиография. Несколько предметнее в рамках этого направления мы остановимся только на периодическом случае, так как здесь формулы следов выступали и в качестве весьма своеобразного метода восстановления потенциала.

Второй период: с конца 1970-х и по настоящее время. После описанного выше периода бурного развития и получения большого количества результатов в рамках эксплуатации имевшихся общих методов, вместе с сужением круга стандартно решаемых задач постепенно в теории на первый план стали выходить задачи для дискретных ДО в частных производных, в решении которых (за исключением задач с разделяющимися переменными) до этого не было никаких продвижений. Принципиальным стал поворот теории к изучению следов абстрактных операторов и приложение этих результатов к конкретным операторам математической физики. Можно сказать, что водоразделом стал переход от третьей задачи теории следов (мы имеем в виду данную выше классификацию) к первой и второй. Работой, фактически открывшей данное направление, стала статья В. А. Садовниченко и В. В. Дубровского [15], роль которой особенно ясна в контексте почти одновременно вышедшей работы тех же авторов [16], в которой впервые был найден регуляризованный след дискретного оператора, задаваемого дифференциальным выражением в частных производных. К настоящему времени теория следов абстрактных операторов ощутимо продвинулась вперед, дойдя в нашей работе [17] до формулировок, в определенном смысле “зеркальных” теореме Лидского.

Также в этот период были получены формулы регуляризованных следов во многих “штучных” задачах, к которым либо вообще не удастся применить существующие общие методы, либо индивидуальный подход привел к существенно более сильным результатам по сравнению с общими теоремами. Мы выделим здесь работы В. А. Садовниченко и В. В. Дубровского [18] и В. Е. Подольского [19], [20] по следам для оператора Лапласа–Бельтрами на сферах и проективных пространствах, оригинальную идею нового метода получения формул следов П. Лакса [21], цикл работ Б. Саймона с сотрудниками (см. работу [22] и имеющиеся там дальнейшие ссылки) по получению формул следов в неперiodическом случае, структурно сходных с упоминавшимися формулами периодической задачи, работы В. А. Любишкина и В. Е. Подольского [23], В. Е. Подольского [19], Б. Саймона и др. [24], в которых с различных точек зрения развивается метод суммирования по Абелю регуляризованных следов.

Как мы уже говорили, ряд разделов теории, а также ряд примыкающих вопросов мы по различным причинам не внесли в основной текст, посвятив им несколько дополнений.

Дополнение 1 посвящено формуле следа типа Крейна и теории функции спектрального сдвига. Как мы уже отмечали, именно этот раздел теории следов нашел хорошее освещение в ряде обзоров и монографий, кроме того, он достаточно замкнут и независим от остальной теории, поэтому мы ограничились дополнениями к уже имеющимся обзорам и собственными комментариями, среди которых и наше решение задачи И. М. Гельфанда об установлении прямой связи формул типа Крейна и типа Гельфанда–Левитана.

В дополнении 2 мы коротко остановились на родственно близком теории следов разделе спектральной теории – теории ζ -функции, некоммутативном вычете и спектральной асимметрии. В некоторых случаях мы сочли необходимым сделать поправки к устоявшейся истории вопроса.

Известная часть современной теории индекса линейных операторов – это применение теории регуляризованных следов. Так как это тоже хорошо освещенный в литературе вопрос, мы сочли возможным ограничиться коротким дополнением 3. Укажем еще на очень тесную связь этого материала с содержанием предыдущего дополнения 2.

Дополнение 4 посвящено обсуждению результатов одного из малоизученных (хотя исторически одного из самых первых) приложений теории регуляризованных следов – приближенному вычислению с помощью следов первых собственных чисел оператора.

В дополнении 5 мы осветили некоторые нестандартные, но весьма любопытные работы. Некоторые из обсуждаемых работ могут, на наш взгляд, послужить источником интересных задач.

Наконец, в дополнении 6 мы предлагаем наиболее интересные и актуальные нерешенные задачи. Конечно, этот перечень несет на себе отпечаток наших личных взглядов и вкусов, но мы надеемся, что это дополнение поможет более быстрому развитию теории.

Мы не затрагиваем формулу следа Сельберга, так как, несмотря на название, эта теория не имеет отношения к теме обзора. Формула следа Сельберга – это формула суммирования, далеко обобщающая формулу суммирования Пуассона, и хотя обычно ее выводят через вычисление следа подходящего ядерного оператора, в ней нет пары операторов и она не может быть названа регуляризованным следом. Эта теория может быть использована как инструмент в теории регуляризованных следов, подобно использованию формулы Пуассона для исследования спектра генераторов периодических потоков на многообразиях, и имея в виду эту возможность, дадим ссылку на достаточно содержательный обзор [25].

При работе над обзором мы взяли за основной принцип обязательность подробного освещения оригинальных методов, технических тонкостей, а часто и постановок задач на примере хотя бы одной работы по соответствующей теме. Далеко не всегда при этом наш выбор падал на работу с последним, наиболее сильным результатом. Часто более ранние работы с простыми, незагроможденными формулировками прозрачнее и лучше подходят для таких целей. Также мы старались привести в работе как можно больше явно вычисленных формул следов. Зачастую один их внешний вид, сравнение с аналогами, наблюдение за устойчиво повторяющимися элементами и на их фоне за новыми составляющими говорят больше, чем строгие доказательства. Кроме того, мы считаем

необходимым собрать эти формулы, разбросанные по первоисточникам, в одном обзоре.

Мы ограничили время выхода работ, охваченных обзором, 2005 годом, но, к сожалению, уверенности в полном охвате всех работ за последние несколько лет у нас нет. Также мы не можем исключить и того, что в поле нашего зрения (особенно с учетом объема материала) не попали и отдельные содержательные более ранние работы. Во всех таких случаях мы приносим свои извинения и авторам, и читателям, и будем признательны всем за указания на такие работы. Мы внесем соответствующие добавления и поправки при первом удобном случае.

Регуляризованные следы. Обыкновенные дифференциальные операторы

Этот раздел мы начнем с изложения пионерской работы И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [7]. Формула регуляризованного следа (4) была получена авторами аналитическим методом из асимптотического поведения решения задачи Коши. Воспользовавшись равенством (абсолютная сходимость ряда известна из асимптотики μ_n)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) &= \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \zeta^2 \sum_{n=1}^{\infty} ((\zeta + \mu_n)^{-1} - (\zeta + \lambda_n)^{-1}) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \zeta^2 \int_0^{\pi} (G_0(x, x, \zeta) - G(x, x, \zeta)) dx, \end{aligned}$$

где $G(x, t, \zeta)$ – функция Грина задачи (3), а $G_0(x, t, \zeta)$ – функция Грина той же задачи с $q(x) \equiv 0$, авторы получили

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^2 \left(\frac{d}{d\zeta} \ln u'_{0x}(\pi, \zeta) - \frac{d}{d\zeta} \ln u'_x(\pi, \zeta) \right),$$

где $u(x, \zeta)$ – решение уравнения $-u'' + (q(x) + \zeta)u = 0$ с начальными условиями $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, а $u_0(x, \zeta)$ – аналогичное решение для $q(x) \equiv 0$ (т.е. $u_0(x, \zeta) = \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} x$). Далее с помощью представления оператором преобразования решения возмущенной задачи через решение невозмущенной они исследовали асимптотическое поведение $(\ln u'_x(\pi, \zeta))'_\zeta$ и получили ответ.

След резольвенты оператора был вскоре использован для исследования регуляризованных следов одним из авторов этой работы вновь [26], и этот метод до сих пор остается одним из основных в теории, а вот то, что ответ содержится в асимптотике характеристического определителя, оставалось незамеченным в течении длительного времени.

Формула (4) не имела вида (6), содержащего оператор возмущения, ни в окончательном виде, ни на стадии промежуточных результатов, и долгое время это положение дел было типичным для получаемых многими авторами результатов по следам для ДО, но именно для первой формулы Гельфанда–Левитана почти сразу Л. А. Дикий дал другое доказательство, показав в работе [8], что формула (4) фактически есть формула (6). Пусть L_0 – оператор вида (3) с условиями Дирихле и с $q(x) \equiv 0$. Собственные числа L_0 суть $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$,

а нормированные собственные функции $\psi_n = \sqrt{2/\pi} \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$. Также рассмотрим оператор $L = L_0 + q$, где q есть оператор умножения на неотрицательную вещественнозначную функцию $q(x)$. Мы будем, в отличие от оригинальной работы, предполагать, что $q(x) \in L_2[0, \pi]$, по мере необходимости уточняя условия на $q(x)$. Собственные числа оператора L обозначим через μ_n , нормированные собственные функции – через v_n . В работе было проведено прямое изучение поведения при $N \rightarrow \infty$ суммы $\sum_{n=1}^N ((v_n, Lv_n) - (\psi_n, L\psi_n))$ через разложение вектора ψ_n по базису $\{v_i\}_{i=1}^\infty$: $\psi_k = \sum_{i=1}^\infty a_{ik} v_i$, $a_{ik} = (v_i, \psi_k)$, и исследование свойств унитарной матрицы $\|a_{ik}\|$ с использованием известных свойств собственных чисел и собственных функций возмущенного оператора: $\mu_n = n^2 + O(1)$, $v_n = \psi_n + O(1/n)$, и доказано, что эта сумма стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Зафиксируем результат в явном виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - n^2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \sin^2 nx \, dx \right) = 0. \quad (8)$$

Если теперь продолжить исследование формулы (8) при более жестких предположениях о $q(x)$ и просуммировать ряд Фурье, возникающий из использования элементарной формулы $\sin^2 nx = (1 - \cos 2nx)/2$, то получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) \, dx - \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)). \quad (9)$$

Итак, если потенциал $q(x) \in L_2[0, \pi]$ таков, что его ряд Фурье сходится в точках 0 и π к числам $q(0)$ и $q(\pi)$ соответственно, то верна⁷ формула (9).

Крупный шаг в развитии теории был сделан в 1955 году Л. А. Диким и в 1956 году И. М. Гельфандом, впервые рассмотревшим задачу о вычислении регуляризованных сумм степеней собственных чисел. Методы этих работ были различными, оба метода заняли важнейшее место в арсенале теории.

И. М. Гельфанд [26] рассмотрел асимптотическое поведение следа резольвенты оператора L двумя способами. С одной стороны, $R(-\lambda)$ можно выразить через $R_0(-\lambda)$ и оператор умножения на q сходящимся по норме рядом:

$$(L + \lambda E)^{-1} = R_0(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (q \cdot R_0(-\lambda))^k,$$

и, используя точное выражение для функции Грина оператора L_0 , автор дал алгоритм вычисления коэффициентов асимптотического при $\lambda \rightarrow +\infty$ разложения

$$\text{Tr}(R(-\lambda)) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-n-1/2}.$$

⁷В оригинальной работе Л. А. Дикого при полностью строго доказанной формуле с вышеприведенными условиями на $q(x)$ сформулировано утверждение для $q(x) \in C^1[0, \pi]$. Впоследствии многие авторы в качестве примеров к своим результатам предлагали “усиление” результата Л. А. Дикого. Данная теорема в окончательном виде опубликована в монографии В. А. Марченко по теории операторов Штурма–Лиувилля [27; задача на с. 94]. Содержательные уточнения и обобщения этой теоремы были получены в работах [28]–[32], ниже мы к ним вернемся.

С другой стороны, так как

$$\mathrm{Tr}(R(-\lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n + \lambda)^{-1},$$

то (при наличии у μ_n достаточно точного асимптотического разложения по степеням n , наша запись подразумевает бесконечное разложение) возможно исследование той же асимптотики из второго представления, и Гельфанд получил разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n + \lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^k - A_k(n)) - \frac{1}{2} c_{0,k} \right) - \frac{\pi \psi'(\lambda)}{2\sqrt{\psi(\lambda)}} + O(\lambda^{-\infty}).$$

Здесь $\psi(\lambda)$ – функция, обратная к монотонной функции $\lambda = \varphi(x^2) \in C^\infty$, где $\varphi(n) = \mu_n$. Неоднозначность выбора φ не выходит за рамки погрешности полученного разложения.

Сравнение полученных разложений и дает искомые формулы следов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^k - A_k(n)) = B(k), \quad (10)$$

где $A_k(n)$ – отрезок асимптотического разложения μ_n^k , а $B(k)$ – явно вычисляемое через данные оператора число.

Другой подход предложил в работе [33] Л. А. Дикий. Для резольвенты оператора Штурма–Лиувилля L автор на основе некоторых коммутационных соотношений получил асимптотическое равенство

$$(L - z)^{-1} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l T_{l,m}(-1, x) (D^2 - z)^{-1 - \frac{l+m}{2}} D^m,$$

понимаемое в том смысле, что разность между левой частью и частичной суммой ряда справа до некоторого N есть оператор R_N такой, что операторы $R_N \cdot D^{2+N}$ и $D^{2+N} \cdot R_N$ продолжаются до ограниченного. Для коэффициентов этой асимптотики были найдены рекуррентные формулы

$$T_{l,m}(k, x) = R_{l,m}(x) \cdot \left(\frac{k}{\frac{l+m}{2}} \right),$$

$$R_{l+2,m}(x) = q(x) R_{l,m}(x) - R_{l,m}''(x) + 2i R_{l+1,m-1}'(x),$$

где $R_{0,0}(x) \equiv 1$, $R_{l,m}(x) \equiv 0$ при $m > l$, $R_{l,m}(x) \equiv 0$, если $l + m$ – нечетное. Используя полученное представление резольвенты, Дикий определил комплексные степени s , $\mathrm{Re} s < -1$, оператора L :

$$L^s \sim \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l T_{l,m}(-1, x) \left(\frac{s}{\frac{l+m}{2}} \right) D^{2s-l},$$

где ряд асимптотический в прежнем смысле. Для произвольного s степень определяется равенством $L^s = L^{s-k} L^k$ при любом подходящем k . Теперь стало

возможно использовать ζ -функцию оператора для нахождения формул следов: при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(L^{-s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sum_{m=0}^l T_{l,m}(-1, x) \left(\frac{-s}{\frac{l+m}{2}} \right) \frac{1}{n^{2s+2l}} (\sin nx)^{(l)} \sin nx dx. \end{aligned}$$

Исследовав поведение при $n \rightarrow \infty$ интегралов вида $\int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$ и перенеся несколько старших членов влево, автор аналитически продолжил $Z(s)$ в полуплоскость, содержащую точки $s = -1, -2, \dots$ и получил формулы (10).

В работе [34] Л. А. Дикий сделал некоторую систематизацию и сравнение имевшихся к тому моменту методов в теории следов, а также впервые указал на глубокую связь теории следов с теорией возмущений дискретного спектра. Из теории возмущений для изолированного простого собственного числа известно, что верно представление

$$\mu_n(\varepsilon) = \lambda_n + \varepsilon \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \dots,$$

где λ_n – собственные числа невозмущенного оператора A , $\mu_n(\varepsilon)$ – собственные числа оператора $A + \varepsilon B$, а $\lambda_n^{(i)}$ – поправки теории возмущений, например

$$\lambda_n^{(1)} = (B\varphi_n, \varphi_n), \quad \lambda_n^{(2)} = \sum_{m: \lambda_m \neq \lambda_n} \frac{(B\varphi_n, \varphi_m)(B\varphi_m, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda_m},$$

здесь φ_n – собственные векторы невозмущенного оператора. Для регулярного оператора Штурма–Лиувилля при некоторых предположениях о потенциале Л. А. Дикий доказал, что

$$\sum (\mu_n - \lambda_n - \lambda_n^{(1)}) = 0 \quad \text{и} \quad \sum (\mu_n - \lambda_n - \lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}) = 0.$$

Аналогичный результат был им доказан и для квадрата этого оператора.

Несколько позже Б. М. Левитан [35] предложил еще один метод для вычисления следов оператора Штурма–Лиувилля: приравнивая выражения для характеристического определителя через решение подходящей задачи Коши, с одной стороны, и через соответствующее бесконечное произведение с другой, автор находит и сравнивает коэффициенты асимптотических разложений этих выражений, из чего и получает формулы следов.

Исследование сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, проведенное в 1957 году Л. Д. Фаддеевым [12], вывело теорию следов на содержательно новый класс задач и впервые установило некоторую связь формул типа Гельфанда–Левитана и Крейна. Этот аспект мы обсудим в дополнении 2, а саму работу [12] и большой массив работ, ею инициированный, мы обсудим в основном тексте, так как и по идейному содержанию, и по технике это направление относится к формулам типа Гельфанда–Левитана.

В [12] Л. Д. Фаддеев рассмотрел в $L_2[0, +\infty)$ пару операторов H_i , $i = 1, 2$:

$$-y'' + q_i(x)y = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad (11)$$

где выполнены следующие условия на потенциалы:

$$\int_0^\infty x|q_i(x)| dx < \infty, \quad i = 1, 2; \quad \int_0^\infty (q_1(x) - q_2(x)) dx = 0,$$

и $q_1(x) - q_2(x)$ обладает определенной гладкостью в некоторой окрестности нуля. При этих условиях Л. Д. Фаддеев доказал, что существует предел

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\Lambda} \lambda d \operatorname{Tr} (E_{\lambda}^{(1)} - E_{\lambda}^{(2)}), \quad (12)$$

здесь $E_{\lambda}^{(i)}$ – спектральная функция оператора H_i , и, вычислив этот предел двумя способами, получил тождество⁸

$$\sum_{l=1}^{n_1} \lambda_l^{(1)} - \sum_{l=1}^{n_2} \lambda_l^{(2)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k(\eta_1(k) - \eta_2(k)) dk = -\frac{1}{4}(q_1(0) - q_2(0)), \quad (13)$$

где $\lambda_l^{(i)}$ – отрицательные собственные числа операторов, $\eta_i(k)$ – соответствующие предельные фазы. Отметим, что предел (12) в применении к оператору (3) (с естественным ограничением $\Lambda \notin \bigcup[\lambda_n, \mu_n]$) дает в точности формулу следа Гельфанда–Левитана, и полученная Л. Д. Фаддеевым формула является формулой первого регуляризованного следа в том же смысле. В этой же работе получен результат для матричного случая. Подчеркнем, что (13) – первая явная формула следа для оператора с непрерывным спектром.

Вскоре В. С. Буслаев и Л. Д. Фаддеев [13] в той же задаче получили формулы следов всех порядков, например, так выглядит второй след (при $q_2(x) \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \lambda_l^2 + \int_0^\infty \left(\frac{4\eta(t)t^3}{\pi} - \frac{2t^2}{\pi} \int_0^\infty q(\tau) d\tau - \frac{q'(0)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty q^2(\tau) d\tau \right) dt \\ = \frac{q''(0) - 2q^2(0)}{8}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь же было найдено явное выражение функции спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ (см. дополнение 1) через предельную фазу:

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \eta(\sqrt{\lambda}), & \lambda > 0, \\ -\int_{-\infty}^{\lambda} \sum_l \delta(z - \lambda_l) dz, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Метод работы можно отнести к методу ζ -функций, и в каком-то смысле здесь дана первая конструкция ζ -функции оператора с непрерывным спектром.

Первый результат для операторов высокого порядка был получен в работе Ч. Хальберга и В. Крамера [36], здесь впервые после [8] был использован подход на основе исследования абстрактных операторов и для возмущения ограниченным оператором V дискретного самосопряженного оператора T такого, что T^{-1}

⁸Напомним: решение задачи Коши $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ уравнения (11) имеет асимптотику $\varphi(x, \sqrt{\lambda}) = A(\sqrt{\lambda}) \sin(\sqrt{\lambda}x - \eta(\sqrt{\lambda})) + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, и функция $\eta(\sqrt{\lambda})$ называется предельной фазой.

ядерный, в предположении, что сходятся ряды $\sum(\lambda_n - \mu_n)$ и $\sum(V\varphi_n, \varphi_n)$, доказано равенство $\sum(\lambda_n - \mu_n) = \sum(V\varphi_n, \varphi_n)$, где $\{\varphi_n\}$ – собственные векторы T . В качестве первого примера в работе впервые был найден след для оператора второго порядка на конечном отрезке с нераспадающимися краевыми условиями, вторым примером стал след для оператора 4-го порядка, однако формула вычислена неверно. В работах Р. Гилберта и В. Крамера (см. [9]) для самосопряженных T и V таких, что T^{-1} , $VT^{-1} \in \mathfrak{S}_1$, были получены формулы регуляризованных следов с регуляризацией, состоящей из нескольких поправок теории возмущений, техника исследования следа разности резольвент была доведена при некоторых условиях на операторы до формулы

$$\lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow \infty} (\text{Im } \lambda)^2 (\text{Tr}(R - R_0) + \text{Tr}(R_0 V R)) = 0,$$

которая была применена к исследованию задачи (11), и были получены те же результаты, что и в [12], и им родственные, с некоторыми уточнениями условий на потенциал.

Первой работой, в которой был рассмотрен сингулярный ДО с дискретным спектром, стала работа М.Г. Гасимова [10]. Для произвольного оператора A автор ввел понятие следа в базисе: если для некоторого ортонормированного базиса пространства $\{\varphi_n\}$ существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (A\varphi_n, \varphi_n)$, то он называется следом A в базисе $\{\varphi_n\}$. Основным результатом работы стала теорема: пусть A – самосопряженный дискретный оператор, B – самосопряженный оператор такой, что $A+B$ – самосопряженный дискретный, и пусть существуют и совпадают следы B в двух базисах из собственных векторов A и $A+B$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (B\varphi_n, \varphi_n)$, где μ_n и λ_n – собственные числа $A+B$ и A . В качестве приложений в [10] были рассмотрены две задачи для обыкновенных полуограниченных ДО второго порядка на оси и полуоси с дискретным спектром, возмущенных оператором умножения на финитную функцию $q(x)$ с нулевым средним, и на оси доказана сходимость ряда разностей собственных чисел к нулю, а для задачи на полуоси с дополнительным требованием дифференцируемости $q(x)$ в некоторой окрестности нуля доказана формула

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \frac{q(0)}{4}. \quad (16)$$

Сразу вслед за этой работой вышла работа М.Г. Гасимова и Б.М. Левитана [37], в которой в задаче на полуоси был рассмотрен случай различных краевых условий у пары операторов и получена формула

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mu_n < \lambda} (\mu_n - \lambda_n) - \frac{2}{\pi} (h_1 - h_2) \sqrt{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2) + \frac{p(0)}{4}, \quad (17)$$

здесь h_1, h_2 – параметры краевых условий. На тот момент это был первый результат такого типа. Аналогичные “формулы следа” в трехмерном случае получил С.И. Гринберг [38], изучивший поведение сумм разностей собственных чисел λ_k и μ_k первой и третьей краевых задач для оператора Лапласа в области, приведем две полученные им формулы:

$$8\pi \sum_{\lambda_k \leq x} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\lambda_k^2} \sim s \ln x, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\lambda_k} = n - s \sqrt[3]{\frac{9\pi n^2}{128v^2}} + o(n^{\frac{2}{3}}),$$

здесь v – объем области, а s – площадь ограничивающей ее поверхности.

Работы Р. Ф. Шевченко (см. [39]) были одними из первых посвященных формулам следа для двучленной операции высокого порядка $d^n/dx^n + q(x)$ на отрезке.

Крупное продвижение в этой теории принадлежит А. Г. Костюченко [40]. Для возмущения положительного дискретного ДО в $L_2(\mathbb{R})$ с операцией вида

$$ly = (-1)^m y^{(2m)} + p_{2m-2}(x)y^{(2m-2)} + \dots + p_0(x)y$$

оператором умножения на финитную функцию $q(x) \in L_1$ было доказано, что если потенциал имеет нулевое среднее, то $\sum_{n=1}^{+\infty} (\mu_n - \lambda_n) = 0$, и был получен результат для оператора четвертого порядка на полуоси: для граничной задачи $y(0) = y'(0) = 0$ и для потенциала $q(x)$, имеющего, сверх уже указанных условий, ограниченную вариацию в некоторой окрестности нуля, верна формула (16).

В работе В. А. Садовниченко [41] исследование операторов высокого порядка было проведено новым методом – применением θ -функции оператора. Суть метода в следующем. Так как (для полуограниченных операторов)

$$\mathrm{Tr}(e^{-tL_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}, \quad \mathrm{Tr}(e^{-tL}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t},$$

где $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ – собственные числа операторов L_0 и L , то формально

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (\mathrm{Tr}(e^{-tL_0}) - \mathrm{Tr}(e^{-tL}))'_t = \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n e^{-\mu_n t} - \lambda_n e^{-\lambda_n t}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n),$$

и если мы при каких-либо условиях найдем предел слева, доказав сходимость ряда справа, то получим формулу следа. В работе [41] для оператора L_0 , определяемого

дифференциальным выражением $(-1)^m y^{(2m)}$ и

краевыми условиями $y(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = y(\pi) = \dots = y^{(m-1)}(\pi) = 0$,

автор исследовал $\mathrm{Tr}(e^{-tL_0})$ при $t \rightarrow 0+$, далее изучил асимптотическое поведение функции Грина $G(x, y, t)$ оператора L , определяемого дифференциальным выражением $(-1)^m y^{(2m)} + p(x)y$ и теми же краевыми условиями, и доказал, что при $p(x) \in C^1$ и $\int_0^\pi p(x) dx = 0$ верно

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^\pi (G'_{0t}(x, x, t) - G'_t(x, x, t)) dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^\pi p(x) G_0(x, x, t) dx.$$

Сходимость ряда разностей собственных чисел при сделанных предположениях следует из асимптотических формул для μ_n , и мы получаем формулу следа. Например, для оператора четвертого порядка имеем $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = -(p(0) + p(\pi))/4$.

Далее, в работе [42] В. А. Садовничий, развив метод работы [33] построения ζ -функции оператора через построение его комплексных степеней (теории ПДО еще не существовало), нашел формулы следов для обыкновенных операторов

вида $\sum_j p_{2m-2j}(x)y^{(2m-2j)}$. Наконец, он же в работе [43] нашел след для системы Дирака, вновь построив комплексные степени оператора. Мы приведем формулу первого следа для системы Дирака, полученную чуть позже в более общей постановке Э. Абдукадыровым [44] методом, восходящим к работе [35]. Для собственных чисел задачи

$$\begin{cases} u'_2 + p(x)u_1 = \lambda u_1, \\ -u'_1 + q(x)u_2 = \lambda u_2, \end{cases}$$

$$u'_2(0) \cos \alpha + u_2(0) \sin \alpha = u'_2(\pi) \cos \beta + u_2(\pi) \sin \beta = 0$$

имеет место формула⁹:

$$\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_{-n}) = \frac{q(\pi) - p(\pi)}{4} \cos 2\beta + \frac{q(0) - p(0)}{4} \cos 2\alpha,$$

верная при выполнении некоторых обычных условий на коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ типа гладкости и обнуления средних.

Фундаментальные результаты теории регуляризованных следов были получены в работе В.Б. Лидского и В.А. Садовниченко [11]. Авторы создали метод получения регуляризованных сумм корней целых функций одного класса и применили его к получению следов обыкновенных ДО. Рассмотрим целую функцию $f(z)$, представимую в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^n e^{\alpha_k z} P_{k,N}(z), \quad (18)$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $P_{k,N}(z) = z^{n_k} \sum_{l=0}^N \beta_l^{(k)} z^{-l} + o(z^{n_k-N})$, $|z| \rightarrow \infty$, причем $\mathbb{C}$ можно покрыть конечным числом открытых секторов, в каждом из которых функции $P_{k,N}(z)$ являются аналитическими вне круга достаточно большого радиуса. Такие $f(z)$ называются функциями класса K . Будем считать, что разложение функций $P_{k,N}(z)$ имеет место для любого N , и индекс N будем опускать. Обозначим выпуклую оболочку точек $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_n$ (18) через R , это r -угольник, $r \leq n$, пусть в вершинах лежат $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{r-1}$. Удалим из плоскости r секторов малого раствора с биссектрисами, параллельными внешним нормальям к R , и вершинами в $z = 0$, оставшееся множество (обозначим его Ω) имеет вид объединения r открытых секторов Ω_s , $s = 0, \dots, r-1$. Выберем теперь в одном из секторов Ω_s (пусть Ω_0) луч l и построим контур Γ_0 , состоящий из дважды проходимого луча l и окружности γ с центром в нуле, так, что все нули $f(z)$ лежат вне Γ_0 (если $f(0) = 0$, то без смены обозначений рассмотрим $f(z)/z^s$, где s – кратность корня $z = 0$). Функция

$$Z_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (19)$$

называется ζ -функцией, ассоциированной с функцией $f(z)$. Здесь $z^{-\sigma} = e^{-\sigma \operatorname{Ln} z}$, где $\operatorname{Ln} z$ – фиксированная регулярная во внешности Γ_0 ветвь

⁹Напомним, что собственные числа системы Дирака неограничены как сверху, так и снизу.

логарифма. Интеграл сходится при $\operatorname{Re} \sigma > 1$, и при этих σ $Z_0(\sigma) = \sum_l z_l^{-\sigma}$, здесь $\{z_l\}$ – все нули $f(z)$. Отметим: $Z_0(\sigma)$ аналитически продолжается во всю σ -плоскость как целая функция. Данный результат неожиданен – к тому времени в спектральной теории ζ -функция оператора была известным и широко используемым объектом, и было хорошо известно, что ζ -функция оператора всегда мероморфна. Мы вернемся к этому вопросу в дополнении 2, а пока продолжим анализ результатов работы [11]: один из центральных результатов этой работы – вычисленные значения аналитического продолжения $Z_0(\sigma)$: при $m = 0, 1, 2, \dots$

$$Z_0(-m) = \omega_{m+1}^{(0)},$$

где $\omega_m^{(0)}$ – коэффициенты разложения

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha_0 + \frac{P'_0(z)}{P_0(z)} + O(e^{\delta|z|}) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{\nu}^{(0)}}{z^{\nu}}$$

при $z \in \Gamma_0$, $|z| \rightarrow \infty$.

С другой стороны, корни $f(z)$ распадаются на r серий $z_{n,s} = a_s n(1 + o(1))$, $a_s = 2\pi i / (\alpha_{s+1} - \alpha_s)$. Поведение $z_{n,s}$ уточняется методом последовательных приближений. Если на границе R лежат только $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{r-1}$, то

$$z_{n,s} \sim a_s n \left(1 + b_s \frac{\ln n}{n} + \frac{c_s}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}} \right), \quad (20)$$

здесь $R_k^{(s)}(\cdot)$ – многочлены степени k . Если на границе R лежат другие $\bar{\alpha}_s$ и делят его сторону на соизмеримые части, то верны аналогичные формулы с разложением по дробным степеням n . Теперь возведем (20) в степень $-\sigma$:

$$z_{n,s}^{-\sigma} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}}, \quad \text{где} \quad Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n) = \sum_{\nu=0}^k d_{k\nu}^{(s)}(\sigma) \ln^{\nu} n,$$

а $d_{k\nu}^{(s)}(\cdot)$ – полиномы. Фиксируем натуральное τ . Функция

$$\Psi_{\tau}(\sigma) = \sum_n \sum_{s=0}^{r-1} \left(z_{n,s}^{-\sigma} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right)$$

аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$. Вычислим $\Psi_{\tau}(-m)$, $m < \tau$, называемые регуляризованными m -суммами корней $f(z)$. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_{\tau}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}},$$

регулярную при $\operatorname{Re} \sigma > 1$. Тогда $\Psi_{\tau}(\sigma) = Z_0(\sigma) - \Phi_{\tau}(\sigma)$.

Так как $Z_0(\sigma)$ – целая функция, то $\Phi_{\tau}(\sigma)$ продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$ вместе с $\Psi_{\tau}(\sigma)$. Но $\Phi_{\tau}(\sigma)$ выражается через ζ -функцию Римана:

$$\Phi_{\tau}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k \left(\sum_{s=0}^{r-1} a_s^{-\sigma} d_{k\nu}^{(s)}(\sigma) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\nu} n}{n^{k+\sigma}} = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k D_{k\nu}(\sigma) (-1)^{\nu} \zeta^{(\nu)}(k+\sigma),$$

и тогда при любом целом $m < \tau$

$$\sum_n \sum_{s=0}^{r-1} \left(z_{n,s}^m - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right) = \omega_{m+1}^{(0)} - \tilde{\Phi}_{\tau}(-m), \quad (21)$$

где $\tilde{\Phi}_{\tau}(-m)$ определяются истинным началом суммирования по n . Дело в том, что асимптотические соотношения (20) задают нумерацию $z_{n,s}$, не обязательно совпадающую с нумерацией по возрастанию модулей. Если есть лишние числа $z_{n,s}$, то $\tilde{\Phi}_{\tau}(-m) = \Phi_{\tau}(-m)$, если же лишними являются несколько выражений $\sum_{k=0}^{\tau} Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)/n^{k+\sigma}$, то соответствующее число надо вычестить и получить $\tilde{\Phi}_{\tau}(-m)$. Эта разница в нумерации называется дефектом регуляризации, аналогичный объект А. Зоммерфельд [45] назвал квантовым дефектом. Он теснейшим образом связан с таким важнейшим понятием теории операторов, как индекс нётерова оператора, мы вернемся к этому вопросу в дополнении 4, а пока покажем, как авторы [11] вычислили дефект регуляризации. Так как $Q_k^{(s)}(0, \ln n) = 1$, $k \geq 1$, и $Q_0^{(s)}(0, \ln n) = 1$, то если в формуле следа положить $m = 0$, мы получим целое число, равное дефекту регуляризации:

$$\varkappa = \omega_1^{(0)} + \frac{r}{2} - \sum_{s=0}^{r-1} b_s \operatorname{Ln} a_s + \sum_{s=0}^{r-1} c_s. \quad (22)$$

Фундаментальная важность этих исследований для теории операторов следует из того, что характеристический определитель обыкновенного ДО с регулярными краевыми условиями (см. [46]) является функцией класса K . Более того, можно заметить, что это утверждение верно и для характеристического определителя более общих задач, у которых коэффициенты уравнения и краевых условий зависят от спектрального параметра полиномиально. Ниже мы увидим многочисленные применения этого метода и далеко идущие, подчас совсем не очевидные, обобщения.

Авторы метода сразу же продемонстрировали силу предложенного ими подхода, рассмотрев [47] важную задачу математической физики, нахождение регуляризованных следов для которой ранее было невысказуемо. Задача

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right)^2 u = i\alpha R \left((p(x) - c) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right)^2 u - p''(x)u \right), \quad (23)$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

известная как один из вариантов задачи Орра–Зоммерфельда, возникает в теории гидродинамической устойчивости, в которой все внимание сосредоточено на малых по модулю собственных числах c_l , рассматриваемых как функции α и R . От их расположения на комплексной плоскости зависит устойчивость соответствующего течения жидкости. В этой работе были детально исследованы линейно независимые решения этого уравнения, доказано, что характеристический определитель задачи является функцией класса K . Здесь впервые был исследован случай, когда один из корней этого определителя кратный. Авторы получили формулы асимптотического поведения собственных чисел задачи и доказали формулы регуляризованных следов всех порядков. Подчеркнем,

что в работе для всех встречающихся коэффициентов были найдены точные рекуррентные соотношения, и формулы следов можно точно выписать, следуя четкому алгоритму. Приведем формулу первого следа. Занумеровав собственные числа $\{c_l\}$ по возрастанию модулей одним индексом и обозначив через λ_l собственные числа задачи в случае $p(x) \equiv 0$, мы получим

$$\sum_{l=1}^{\infty} (c_l - \lambda_l) = -\frac{3}{4}(p(1) + p(0)) + \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha} \int_0^1 \operatorname{sh} \alpha(1-t) \cdot \operatorname{sh} \alpha t \cdot p''(t) dt,$$

из чего извлекаем любопытное следствие: при том, что исходная задача существенно несамосопряженная, имеем $\sum_{l=1}^{\infty} (\operatorname{Im} c_l - \operatorname{Im} \lambda_l) = 0$.

В работах В. А. Садовниченко (см. [48]) был изучен вопрос о нахождении регуляризованных сумм корней функций класса K из одного сектора T_s . Этот вопрос тесно связан с уже упоминавшимся “противоречием” между мероморфностью ζ -функции оператора и голоморфностью на плоскости ζ -функции, ассоциированной с функцией класса K . Рассмотрим пару ζ -функций (19) $Z_s(\sigma)$, $Z_{s+1}(\sigma)$, ассоциированных с данной функцией $f(z)$, и введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\zeta_s(\sigma) = \frac{Z_{s+1}(\sigma) - Z_s(\sigma)}{e^{2\pi i \sigma} - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad \operatorname{Re} \sigma > 1,$$

где C_s – контур, состоящий из верхних берегов разрезов Γ_s и Γ_{s+1} , обращенных к сектору T_s . Видим, что $\zeta_s(\sigma)$ – мероморфная функция с простыми полюсами в точках $\sigma = 1, 0, -1, -2, \dots$ и

$$\operatorname{res}_{\sigma=-k} \zeta_s(\sigma) = \frac{\omega_{k+1}^{(s+1)} - \omega_{k+1}^{(s)}}{2\pi i},$$

а также нетрудно видеть, что $\zeta_s(\sigma) = \sum_n z_{n,s}^{-\sigma}$, где сумма взята по корням $f(z)$, расположенным внутри C_s – таким образом, именно эта функция наиболее близка по структуре ζ -функции оператора. В этом результате раскрыто различие между двумя типами ζ -функций и одновременно показана их взаимосвязь, и, в частности, указана причина того, почему ζ -функция, ассоциированная с функцией класса K , продолжается во всю плоскость как целая.

Далее в этих работах для одной серии корней были получены формулы регуляризованных следов. Заметим, что мероморфность соответствующей ζ -функции приводит к весьма существенным проблемам в вычислении некоторых коэффициентов: появляется необходимость вычисления значений регулярной части ζ -функции в точках полюсов. Обсудим, что означает суммирование одной серии корней с точки зрения теории ДО.

Обратим внимание на то, что обыкновенный ДО n -го порядка имеет решения с асимптотическим разложением по $\sqrt[n]{\lambda}$ и, соответственно, его характеристический определитель является функцией класса K относительно переменной $\sqrt[n]{\lambda}$. Таким образом, его собственным числам соответствует n серий корней соответствующей функции класса K , и суммирование одной серии корней $f(z)$ по существу означает суммирование дробных степеней собственных чисел оператора. Приведем две формулы для оператора Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле. Пусть $q(x)$ вещественнозначная, все $\lambda_n > 0$ и в формуле ниже

$\sqrt{\lambda_n} > 0$. Тогда [48]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{n} \right) &= \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + t} - \frac{\pi}{2\sqrt{t}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} - \gamma, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_n} - n - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} q(x) dx + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{2}{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + t} - \frac{\pi}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t\sqrt{t}} \int_0^{\pi} q(x) dx \right) \sqrt{t} dt, \end{aligned}$$

здесь γ – постоянная Эйлера.

В течение ряда лет применение и обобщение метода функций класса K стало одним из центральных направлений развития теории. В работе [49] В. А. Садовничему удалось применить этот метод к ДО с неограниченным коэффициентом – краевой задаче для уравнения Бесселя

$$-y'' + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} y + p(x)y = \lambda y$$

на отрезке $[0, \pi]$, с краевым условием $y(\pi) = 0$ (индекс дефекта этого оператора $(1, 1)$), здесь $p(x) \equiv 0$ при $x \in [0, a]$, $a < \pi$, $\nu \geq 1$. Собственные числа этого оператора – корни уравнения $y_1(\pi, \lambda) = 0$, где $y_1(x, \lambda)$ – решение уравнения, принадлежащее $L_2[0, \pi]$. При $x \leq a$ решение выражается через функцию Бесселя: $y_1(x, \lambda) = \sqrt{x} I_{\nu}(\sqrt{\lambda} x) \lambda^{-\frac{\nu}{2}}$, и ее асимптотика хорошо известна, а при $x \in (a, \pi]$ асимптотика исследуется вполне стандартными методами, и получаем, что функция $y_1(\pi, \lambda)$ есть функция класса K (18). Отметим, что даже при $p(x) \equiv 0$ в [49] получен нетривиальный результат, касающийся нулей $\lambda_{n,\nu}$ функции $I_{\nu}(\sqrt{\lambda} \pi)$. Например, формула первого следа в этом случае имеет вид

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{n\nu} - \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{12} - \frac{1}{8} - \frac{(4\nu^2 - 1)(\nu + 1)}{\pi^2}.$$

В связи с этим заметим, что суммы отрицательных степеней нулей функций Бесселя были предметом многочисленных исследований, некоторые суммы вычислили Дж. У. Рэлей и А. Кэли, и укажем в этой связи на работу П. Л. Капицы [50], в которой он нашел точные выражения сумм для всех отрицательных степеней, и на работу [51], содержащую некоторые обобщения.

Нетривиальное приложение и обобщение метода функций класса K нашел В. А. Садовничий в работе [52]: для мероморфной функции $\Phi(z) = f_2(z)/f_1(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – две функции класса K (18), введена и изучена ζ -функция

$$Z_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \Phi(z) dz, \quad \operatorname{Re} \sigma > -1,$$

названная взвешенной ζ -функцией, доказано, что $Z_0(\sigma)$ продолжается во всю плоскость как целая, при $\operatorname{Re} \sigma > -1$ получено представление сходящимся рядом

$$Z_0(\sigma) = \sum_n \beta_n z_{1n}^{-\sigma},$$

где z_{1n} – нули $f_1(z)$, а β_n – вычеты $\Phi(z)$, для всех достаточно больших номеров $\beta_n = f_2(z_{1n})/f_1'(z_{1n})$. Далее в работе доказаны формулы регуляризованных следов и указан смысл этих формул в приложении к обыкновенным ДО: если в качестве функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ взять характеристические определители пары задач Штурма–Лиувилля, то $\beta_n = 1/\alpha_n$, где $\alpha_n = \int_0^\pi y_n^2(x) dx$ – так называемые нормировочные числа оператора, $y_n(x)$ – собственные функции, нормированные условием $y_n(0) = 1$. Полученная формула следа нулевого порядка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{1n}} - \frac{1}{\alpha_{2n}} \right) = 0$$

в терминах спектральной функции оператора $\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \alpha_n^{-1}$ означает, что для любой пары операторов Штурма–Лиувилля с одним и тем же краевым условием в нуле имеет место асимптотическое равенство

$$\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda) + o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Хорошо известно, сколь трудным был путь получения аналогичного результата для оператора на полуоси (см. [27]), и на этом фоне путь доказательства формулы (24) с помощью следов кажется совсем простым.

Еще одно обобщение метода Лидского–Садовнического было дано в цикле работ А. А. Стакуна (см. [53]), в которых были исследованы ДО второго порядка с точкой поворота. В указанном цикле работ для уравнения вида

$$y'' + \lambda^2 q(x)y + R(x)y = 0, \quad q(x) = x^\alpha r(x), \quad r(x) > 0,$$

были изучены различные граничные задачи на отрезке и полуоси, для различных вещественных значений α , с гладкими коэффициентами. Особо были изучены случаи $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, рассмотрены задачи и с непрерывным спектром и с комплексным $R(x)$.

Цикл работ (см. [54] и приведенные там ссылки) А. С. Печенцова, основанный на методе Лидского–Садовнического, был посвящен исследованию асимптотического распределения собственных чисел и получению формул следов в случае, когда характеристический многочлен обыкновенного ДО имеет кратные корни. Такие задачи, как правило, выпадают из зоны прямого применения этого метода и требуют некоторой его модификации. При некоторых ограничениях здесь вместо функций класса K (18) возникают целые функции вида

$$\Delta(\lambda) \sim \sum_{k=1}^H \left(\exp \left(\sum_{j=0}^{h-1} \theta_{kj} \lambda^{\frac{h-j}{h}} \right) \lambda^{\frac{n_k}{h}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(k)} \lambda^{-\frac{\nu}{h}} \right).$$

Для построения ζ -функции приходится выбирать контур интегрирования на римановой поверхности корня $\sqrt[h]{\lambda}$, и удастся доказать аналоги основных свойств функции (19), что позволяет получить и формулы следа типа (21). Отметим, что для случая одного кратного корня характеристического многочлена А. С. Печенцов доказал, что структура асимптотических формул для корней рассматриваемых целых функций сохраняется такой же, как и в случае функций класса K (18).

Другое интересное приложение метода А. С. Печенцов нашел в одной сингулярной задаче (см. [55]), еще раз подтвердив, что приложения этого метода шире, чем некоторые классы регулярных задач. На полуоси для

$$(-1)^n y^{(2n)} + xy = \lambda y$$

была рассмотрена краевая задача $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ и найдены точные явные рекуррентные формулы для следов всех порядков.

Метод, основанный на исследовании корней целых функций, был применен в работе Ю. Белаббаси [56] для изучения многоточечной задачи

$$\begin{aligned} (-1)^n y^{(2n)} + q(x)y = \lambda y, \quad y\left(\frac{j\pi}{2n-1}\right) = 0, \\ \int_{\frac{\pi j}{2n-1}}^{\frac{\pi(j+1)}{2n-1}} q(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, 2n-1. \end{aligned}$$

В работе была найдена асимптотика собственных чисел и формула следа (' у знака суммы означает, что истинное число слагаемых взято с учетом дефакта регуляризации (22)):

$$\sum'_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha k^{2n}) = -\frac{2n-1}{4n} \sum_{j=0}^{2n-1} q\left(\frac{\pi j}{2n-1}\right),$$

здесь α – известное число. Несколько ранее им же была получена формула следа в многоточечной задаче для оператора четвертого порядка без ограничительных условий на интегралы от потенциала.

Метод функций класса K оказался применим и к исследованию дифференциально-функциональных задач. В работе М. Мартиновича [57] рассмотрена краевая задача $y(0) = y(\pi) = 0$ для уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \alpha_n \int_0^\pi y(t) dt$$

и исследованы асимптотические свойства решений уравнения, собственных чисел задачи, изучено аналитическое продолжение ζ -функции оператора и доказаны формулы следов всех порядков. Формула первого следа для случая $n = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и потенциала с нулевым средним имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left(\lambda_{nj} - (4n+j)^2 - \frac{c_j}{4n+j} \right) = -\frac{q(\pi) + q(0)}{4},$$

где $c_1 = 4/\pi$, $c_3 = -4/\pi$, $c_2 = c_4 = 0$.

Метод работы [52] исследования взвешенной ζ -функции был применен в ряде работ З. Каделбургом. Два приложения к известным (существенно несамосопряженным) задачам математической физики содержится в [58]. В задаче Редже ($q(x)$ – комплекснозначная)

$$-y'' + q(x)y = s^2 y, \quad y(0) = y'(a) + isy(a) = 0,$$

$q(x) \sim c_\mu(a-x)^\mu$ при $x \rightarrow a-0$, $\mu \geq 0$, $c_\mu \neq 0$, автор определил нормировочные константы и обобщенную спектральную функцию (см. [27]) равенствами

$$\alpha_n = \int_0^a \varphi_n^2(x) dx - \frac{i\varphi_n^2(a)}{2s_n}, \quad \rho(\lambda) = \sum_{|\operatorname{Re} s_n| < \lambda} \alpha_n^{-1}$$

и доказал следующую формулу взвешенного следа нулевого порядка:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - bn^2 + c \ln^2 n + d \ln n + e \right) = -\frac{q'(0)}{4} - b\zeta(-2) + c\zeta''(0) - d\zeta'(0) + e\zeta(0),$$

где

$$\begin{aligned} b &= 2\pi^2/a^3, & c &= (\mu+2)^2/(2a^3), & d &= (\mu+2)(\ln A + \mu+2)/a^3, \\ e &= (\ln^2 A + 2(\mu+2) \ln A - 2aB + 2a^2q(0))/(2a^3), \\ A &= -(2\pi i)^{\mu+2}/(a^{\mu+2}q^{(\mu)}(a)), & B &= \int_0^a q(x) dx - q^{(\mu+1)}(a)/(2q^{(\mu)}(a)). \end{aligned}$$

Также и для задачи Орра–Зоммерфельда З. Каделбург [58] определил обобщенную спектральную функцию и получил след.

В работе [59] З. Каделбург для самосопряженной задачи, заданной двучленным ДО, доказал формулу $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi\alpha_n^{-1} - 2kn^{k-1}) = -2k\zeta(1-k)$, из которой следует совпадение спектральных функций таких операторов с точностью до бесконечно малой при $\lambda \rightarrow \infty$ величины (ср. с (24)). Наконец, в работе [60] Каделбурга и Мартиновича исследованы следы с весом для некоторого семейства дифференциально-функциональных уравнений.

Хотя изначально теория функций класса K была написана с идеей применения к ДО с достаточно гладкими коэффициентами, ее оказалось возможным применять и для исследования операторов с кусочно-гладкими коэффициентами. В цикле работ С. И. Митрохина (см. [61] и там дальнейшие ссылки) были исследованы такие задачи. Так, например, он исследовал задачу

$$-k(x)y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

с $k(x) = a_j^2$, $q(x) = a_j^2 q_j(x)$, j – номер интервала, на которые разбит отрезок: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = \pi$, и с условиями склейки

$$y_{j+1}(x_j + 0) = y_j(x_j - 0), \quad a_{j+1}y'_{j+1}(x_j + 0) = a_jy'_j(x_j - 0).$$

Были получены формулы следа любого порядка (порядок зависит от гладкости функций $q_j(x)$), формула первого следа имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \frac{\pi^2 n^2}{m^2} - \frac{2\pi c}{m} \right) &= -\frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)) + \frac{\pi c}{m} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N (a_{j+1}^2 q(x_j + 0) - a_j^2 q(x_j - 0)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n x_j a_{j+1}}{\pi a_j + x_j(a_{j+1} - a_j)}, \end{aligned}$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N=1} a_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} q(t) dt, \quad m = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\pi a_j + x_j(a_{j+1}a_j)}{a_j a_{j+1}}.$$

Также С. И. Митрохин исследовал дифференциально-функциональные операторы с разрывными коэффициентами и оператор Штурма–Лиувилля с разрывной весовой функцией. Во всех случаях были доказаны формулы следов и явно предьявлены формулы первого следа.

Оказалось возможным применить метод функций класса K и к задачам с запаздывающим аргументом. М. Пикула в работе [62] изучил задачу второго порядка:

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y(x - \tau) &= \lambda y, & y'(0) - hy(0) &= y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \\ y(x - \tau) &= y(0)\varphi(x - \tau) \quad \text{при } x \leq \tau, & \varphi(0) &= 1. \end{aligned}$$

Интересно сравнить две формулы первого следа: при $\tau \geq \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\tau) - n^2) = q(0)\varphi(-\tau) - \frac{h^2 + H^2}{2},$$

а при $\tau < \pi$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n(\tau) - n^2 - \frac{2}{\pi} \left(h + H + \frac{\cos n\tau}{2} \int_{\tau}^{\pi} q(t) dt \right) \right) \\ &= q(0)\varphi(-\tau) - \frac{h^2 + H^2}{2} + \frac{h + H}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\pi} q(t) dt + \frac{(q(\pi) - 3q(\tau))(\pi - \tau)}{4\pi}. \end{aligned}$$

Эти соотношения можно (весьма косвенно, конечно) трактовать как формулы обратной задачи, похожие соотношения активно исследовались в периодическом случае, о котором речь пойдет ниже.

Хотя метод функций класса K оказался применим к весьма широкому кругу задач и доказал свою эффективность, ограничения по его применимости к обыкновенным ДО вызвали неудовлетворенность и требовали дальнейших исследований. В первую очередь это относилось к требованию соизмеримости длин отрезков, на которые показатели α_k делят стороны своей выпуклой оболочки (18). Один из возможных путей распространения теории на более широкий класс функций был предложен в работах В. А. Садовниченко, В. А. Любишкина и Ю. Белаббаси (см. [63]). Здесь был рассмотрен случай, когда показатели α_j (см. (18)) делят некоторые отрезки своей выпуклой оболочки на несоизмеримые части. Для каждого отрезка выпуклой оболочки по точкам $P_j(\alpha_j, n_j)$ (здесь координаты точки – параметры асимптотики (18)) строится ломаная Ньютона, и во всех случаях, кроме существования в этой ломаной отрезков, параллельных действительной оси и делимых точками P_j на несоизмеримые части, удалось получить все результаты, аналогичные [11], – аналитическое продолжение ζ -функции, асимптотическое распределение собственных чисел и формулы следов всех порядков. Отметим, что роль ζ -функции Римана в этой задаче играла известная специальная функция $F(a, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n n^{-\lambda}$, которая при значении параметра $a = 1$ является как раз ζ -функцией Римана.

Дальнейшее обобщение было получено В. А. Садовничим и В. А. Любишкиным в статье [64]. В этой работе для класса C целых функций экспоненциального типа σ , характеризуемого следующими свойствами:

- 1) все корни функции $f(z)$ лежат в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| < h$;
- 2) при некотором фиксированном значении $\operatorname{Im} z$ верны неравенства

$$0 < m \leq |f(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)| \leq M < \infty;$$

3) типы функции $f(z)$ в верхней и нижней полуплоскостях совпадают, исследована ассоциированная ζ -функция и предложен метод вычисления регуляризованных сумм корней функции $f_1(z)$, имеющей представление вида

$$f_1(z) = f(z) + z^{-1}A_1(z) + \dots + z^{-m}A_m(z) + O(z^{-m-1} \exp(\sigma|\operatorname{Im} z|))$$

при $z \rightarrow \infty$, здесь $f(z)$ – функция класса C , $A_k(z)$ – целые функции, допускающие оценку $|A_k(z)| \leq M_1 \exp(\sigma|\operatorname{Im} z|)$. Подчеркнем, что сама функция $f_1(z)$ может не принадлежать классу C . Корни функций класса C расположены сложно, и формулы следов удалось получить только с расстановкой скобок.

Важным представителем класса C явились функции класса K с несоизмеримостью отрезков на выпуклой оболочке показателей, и в работе С. А. Салеха [65] метод функций класса C был применен к многоточечной задаче

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y(\pi) + \sum_{k=3}^n \alpha_k y(\pi x_k) = \beta_1 y(0) + \beta_2 y(\pi) + \sum_{k=3}^n \beta_k y(\pi x_k) = 0,$$

где $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, $0 < x_3 < \dots < x_n < 1$. Были получены формулы следов без дополнительных условий на x_k , что невозможно применением метода функций класса K . Также здесь рассмотрен пример с краевым условием, содержащим интегральное слагаемое.

Еще Л. А. Дикий (см. [34] и там дальнейшие ссылки) рассматривал задачу о регуляризации рядов, содержащих собственные функции оператора, наиболее важная и естественная постановка – суммирование интегрального ядра семейства спектральных проекторов оператора. Весьма общие результаты в этом направлении, основанные на методе Лидского–Садовничего, были получены в работах Г. С. Типенко (см. [66]). Автор разработал метод суммирования вычетов мероморфных функций вида $H(x, \xi, z)/\Delta(z)$ с параметрами x и ξ , где $H(x, \xi, z)$ и $\Delta(z)$ – целые функции экспоненциального типа с некоторыми дополнительными условиями, и применил его для исследования задачи с весьма общим видом краевых условий и сложным вхождением спектрального параметра

$$y^{(m)} + p_1(x, z)y^{(m-1)} + \dots + p_m(x, z)y = 0,$$

$$U_i(y) + \sum_{k=0}^{\kappa_i} \int_0^1 y^{(k)} d\sigma_{ik}(x) = 0,$$

где $\kappa_i \leq m-1$, $i = 1, \dots, m$, $U_i(y)$ – двухточечные функционалы, образующие обычные регулярные нераспадающиеся краевые условия, $p_k(x, z) = \sum_{n=0}^k p_{kn}(x)z^n$, $k = 1, \dots, m$, $\sigma_{ik}(x)$ – функции ограниченной вариации на

отрезке $[0, 1]$, непрерывные в точках 0 и 1, корни характеристического уравнения $\lambda^m + p_{11}(x)\lambda^{m-1} + \dots + p_{mm}(x) = 0$ различны, отделены от нуля и их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x . Г. С. Типенко получил общие формулы регуляризованных сумм собственных функций; например, для оператора Штурма–Лиувилля (3) приведем формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(x)y_n(\xi) - 2 \sin \pi n x \sin \pi n \xi + \frac{1}{\pi n} (q(x) \cos \pi n x \sin \pi n \xi - q(1 - \xi) \cos \pi n \xi \sin \pi n x)) = \frac{1}{2} ((1 - \xi)q(x) + xq(1 - \xi)),$$

здесь $y_n(x)$ – нормированные собственные функции оператора, $x \leq \xi$, $q(x) = \int_0^x p(t) dt$, $\int_0^1 p(t) dt = 0$, $p(t)$ – потенциал оператора.

Аналогичную задачу рассмотрел Ю. В. Матвеев [67] для дифференциально-функциональной задачи

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + (p_n(x) - \rho^n)y = A(x) \sum_{i=1}^{s_1} \rho^{q_i} F_i(y)$$

с регулярными краевыми условиями, где $F_i(y) = A_{1i} \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} A_i(\xi)y(\xi) d\xi$ при $i = 1, \dots, s$ и $F_i(y) = A_{1i}y^{(n_i)}(x_i)$ при $i = s+1, \dots, s_1$, $0 < x_i < \pi$, $0 \leq x_{1i} < x_{2i} \leq \pi$, $0 \leq n_i \leq n-1$, еще ряд условий, несущественных для общего восприятия задачи, мы не приводим. Автор получил ряд формул сумм собственных функций, в том числе регуляризованные суммы значений собственных функций в одной точке.

После работ [12], [13] изучение формул следов в задачах рассеяния было интенсивно продолжено. Крупное продвижение было сделано в работах В. С. Буслаева [68], [69], в которых формулы следов были получены для оператора Шрёдингера

$$H(u) = -\Delta u + q(x)u \quad (25)$$

в трехмерном пространстве, здесь $q(x) \in C^\infty$ равномерно убывает на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Автор нашел равномерное по $\arg \lambda$ асимптотическое разложение интегрального ядра резольвенты и получил при $\lambda \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\text{Tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \right)^n \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \Omega_n^{(1)}(x, x) dx$$

(функции $\Omega_n^{(1)}(x, x)$ можно найти из рекуррентных соотношений) и равенство

$$\text{Tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) = \int_{-\infty}^0 \frac{dN_-(\mu)}{\mu - \lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\mu} (\ln \det S(\mu)) \frac{d\mu}{\mu - \lambda},$$

где $N_-(\mu)$ – считающая функция отрицательного спектра, $S(\mu)$ – матрица рассеяния. Из сравнения этих выражений были получены формулы следа всех

порядков, первый след имеет вид

$$\sum_{l=1}^M \lambda_l = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\ln \det S(\lambda) + \frac{2i\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} q(x) dx + \frac{1}{8\pi i\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^3} q^2(x) dx \right) d\lambda.$$

Также в работе для функции спектрального сдвига рассматриваемой пары операторов было получено точное выражение, подобное (15). В статье [70] аналогичное исследование было проведено для задачи рассеяния во внешности области. Отметим еще, что в статье [69] имеется краткий обзор некоторых малоизвестных работ, не вошедших в наш список литературы, в том числе содержащих физические приложения.

Совсем недавно формулы следов всех порядков типа (13) и (14) были получены в работах А. В. Рыбкина [71] и С. М. Белова и А. В. Рыбкина [72] для дальнедействующих, т.е. не имеющих конечного первого момента, потенциалов.

Ряд авторов – Ф. А. Березин, В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев [73]–[75] применили формулы следов в задачах рассеяния для вывода новых формул для второго и третьего групповых интегралов некоторых задач статистической физики. Выделим здесь работу В. С. Буслаева [74], в которой помимо изложения собственных результатов автор дает критический анализ ряда работ других авторов и указывает на связь этих исследований с классической формулой статистической физики Бете–Уленбека [76]. Одновременно велись и очень близкие по сути исследования формул следов в модели Фридрихса, укажем здесь на работу Д. Р. Яфаева [77], основной результат которой мы приведем для иллюстрации. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2; N)$ вектор-функций $f(x_1, x_2)$ со значениями во вспомогательном гильбертовом пространстве N рассматриваются операторы: H_0 – оператор умножения на $x_1 + x_2$, V_j – линейные операторы с ядром (в смысле теоремы Л. Шварца) вида $q_j(x_j, x'_j)\delta(x_i - x'_i)$, $j = 1, 2$, $i \neq j$, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция, $H = H_0 + V_1 + V_2$, $H_j = H_0 + V_j$. Предполагается, что $q_j(x_j, x'_j)$ задают ядерные операторы в N , $q_j^*(x, x') = q_j(x', x)$ и что в ядерной норме функции $q_j(x_j, x'_j)$ обладают достаточной гладкостью и быстро убывают на бесконечности. Одновременно рассматриваются в пространстве $L_2(\mathbb{R}; N)$ операторы: h_0 – оператор умножения на x , v_j – линейные операторы с ядром $q_j(x, x')$, $j = 1, 2$, $h_j = h_0 + v_j$. Через $R(z)$, $R_j(z)$, $R_0(z)$ и $r_j(z)$ обозначаются резольвенты операторов H , H_j , H_0 и h_j , $R_c = R - R_0 - (R_1 - R_0) - (R_2 - R_0)$, а $S(E)$, $S_j(E)$, $s_j(E)$ – матрицы рассеяния для пар (H_0, H) , (H_0, H_j) , (h_0, h_j) . Тогда формула следа работы [77] имеет вид

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} \operatorname{Tr} R_c(E + i0) &= \operatorname{Tr}(S^*(E)S'(E) - S_1^*(E)S_1'(E) - S_2^*(E)S_2'(E)) \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \sum_{i \neq j} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr}_N(s_i^*(\lambda)s_i'(\lambda)s_j'(E - \lambda)s_j^*(E - \lambda)) d\lambda. \end{aligned}$$

Ряд авторов использовали формулы регуляризованных следов для исследования распределения резонансных состояний в задаче рассеяния, из последних работ укажем на статью С. А. Степина [78], в которой можно найти дальнейшие ссылки. Отметим в этом контексте и более раннюю работу А. В. Рыбкина [79], получившего некоторую формулу следов для резонансов.

На ранней стадии развития теории периодические задачи почти не рассматривались: для ДО на отрезке существенным барьером был переход от распадающихся краевых условий к нераспадающимся, для операторов на прямой с непрерывным спектром более чем существенной трудностью было неубывание потенциала. После уже упоминавшейся первой работы Ч. Хальберга и В. Крамера [36] дальнейшее продвижение было сделано в работе Г. Хохштадта [80], причем здесь впервые были соединены исследования регулярной и сингулярной задач (см. ниже формулу (29)). Конечно, метод функций класса K полностью решал вопрос для задач на отрезке, но в связи с приложениями в периодической задаче были особые требования к алгоритму вычислений и форме ответа, а также особый интерес к формулам, содержащим собственные числа двух (а иногда и большего числа) заметно различающихся задач, а не к формулам с регуляризацией степенями натуральных чисел. Все эти задачи можно решить методом функций класса K , но никем это сделано не было.

По настоящему пристальный и детальный интерес к периодическому случаю возник после открытия метода обратной задачи в интегрировании ряда классических нелинейных уравнений математической физики. Интерпретация этих уравнений как гамильтоновых систем с бесконечным числом степеней свободы привела к открытию у них бесконечной системы сохраняющихся (независящих от времени) величин – первых интегралов, или законов сохранения. Оказалось, что следы операторов с непрерывным спектром, в частности, формулы следов оператора Штурма–Лиувилля, найденные в работах Л. Д. Фаддеева и В. С. Буслаева [12], [13], дают законы сохранения для динамической системы, описываемой уравнением Кортевега–де Фриза. Первой работой, в которой была дана такая интерпретация, стала работа В. А. Захарова и Л. Д. Фаддеева [14]. В этот период вышло несколько работ, в которых разрабатывались различные методы вычисления формул следов в задачах рассеяния в связи с методом обратной задачи интегрирования нелинейных эволюционных уравнений. Мы безусловно выделим работу И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого [81], в которой, во-первых, была вскрыта алгебраическая сторона вопроса, а во-вторых, применены два метода вычисления формул следов, прямо восходящих к работам этих же авторов по следам оператора Штурма–Лиувилля: метод, основанный на асимптотическом разложении резольвенты оператора, и метод, связанный с исследованием ζ -функции. В работе Б. М. Левитана [82] волновое уравнение решено двумя способами: методом Римана и методом Фурье, результаты приравнены и полученное равенство проварьировано по потенциалу, из чего и найдены плотности интегралов движения для уравнения Кортевега–де Фриза. Подробнее об этой теории написано в ряде обзоров и монографий (см., например, [83]), из современных работ выделим статью Ф. Гештези и Х. Холдена [84] и работу А. В. Рыбкина [85], посвященные прямо нашей основной теме (в них можно найти дальнейшие ссылки). Также укажем, что сравнительно недавно [86] формулы следов типа (14) были применены для исследования вопроса о структуре спектра операторов с потенциалом из L_2 .

Но особый интерес в это время вызвала задача о вычислении различных форм формул регуляризованных следов для задач на конечном отрезке с периодическими и антипериодическими краевыми условиями и периодической задачи на всей прямой. Это было связано как с важностью периодических

задач в физических приложениях (что проявилось в особом интересе к этому случаю при исследовании нелинейных уравнений методом обратной задачи), так и с наличием прямой связи дискретного спектра задач на отрезке с непрерывным спектром задач на прямой.

Среди большого количества работ, содержащих исследования этой задачи, мы выделим фундаментальную работу Г. Маккина и П. ван Мёрбеке [87], посвященную спектральной теории оператора Хилла, в которой был предложен оригинальный и изящный метод получения формул следов. В пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ рассматривается оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad (26)$$

где функция $q(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ и периодическая с периодом 1, через λ_n обозначим границы интервалов спектра этого оператора:

$$[\lambda_0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \lambda_3] \cup [\lambda_4, \lambda_5] \cup \dots, \quad -\infty < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots,$$

через μ_n – спектр задачи Дирихле для оператора на отрезке $[0, 1]$ с дифференциальным выражением (26). Хорошо известно, что $\mu_i \in [\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots$. В работе была найдена асимптотика θ -функции при $t \rightarrow +0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-t)^m H_{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-3)}, \quad (27)$$

где $H_m = \int_0^1 I_m(q(x), q'(x), \dots) dx$, I_m – полином, и доказаны формулы следов

$$\lambda_0^p + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_{2i-1}^p + \lambda_{2i}^p - 2\mu_i^p) = S_p, \quad (28)$$

где числа S_p определяются из равенства степенных рядов

$$\sum_{p=1}^{\infty} (2\varepsilon)^p S_p / p = 2 \ln \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{\partial H_j(0)}{\partial q} \right).$$

Приведем несколько первых ответов:

$$S_1 = q(0), \quad S_2 = q^2(0) - \frac{1}{2} q''(0), \quad S_3 = q^3(0) - \frac{15}{16} q'(0) - \frac{3}{2} q(0) q''(0) + \frac{3}{16} q^{(4)}(0).$$

Также в [87] с помощью оригинального технического приема были найдены формулы и другого канонического вида, прямо восходящего к пионерским работам [7], [26], [34]. Из предыдущих формул следует, что при $t \rightarrow +0$ верно разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-t)^m H_{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-3)} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-t)^p}{p!} S_p,$$

и, заменяя (с точностью до $O(t^{-\infty})$) $1/\sqrt{4\pi t}$ на $1/2 + \sum_{l=1}^{\infty} \exp(-l^2\pi^2 t)$ с последующим разложением по степеням t уже рядов из экспонент, получаем

$$2 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\mu_l^p - \sum_{i+j=p} \frac{p! (l^2\pi^2)^i H_{j-1}}{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)i!} \right) = \frac{p! H_{p-1}}{1 \cdot 3 \cdots (2p-3)} - S_p.$$

Отметим, что первым формулу типа (28) получил Г. Хохштадт [80] в случае, когда в спектре периодической задачи есть одна и только одна лакуна, и применил ее для решения обратной задачи. Он рассмотрел семейство операторов на отрезке в периодической задаче, потенциалы которых отличались лишь сдвигом на параметр τ , и получил формулу

$$\mu(\tau) - \mu(0) = -\frac{1}{2}(q(\tau) - q(0)), \quad (29)$$

где μ – первое собственное значение задачи с закрепленными концами (оно лежит внутри единственной лакуны в спектре оператора Хилла).

Мы еще будем встречать обобщения формулы (29) именно как своеобразного инструмента обратной задачи, например, из этого результата автор получил, что единственная лакуна в спектре может быть, только если потенциал есть эллиптическая функция. В той же работе была получена и формула следа в случае конечного числа лакун $\sum_{i=1}^n (\mu_i(\tau) - \mu_i(0)) = -\frac{1}{2}(q(\tau) - q(0))$, но получить аналогичное следствие из нее не удалось, развитие эта тема получила в работе [87] и вышедшей почти одновременно работе [88] (с другой техникой получения формул следов). Позже аналогичные формулы следов удалось получить (и применить к обратной задаче) и в почти периодическом случае, см., например [89], и для еще более широких классов операторов [90]. Мы далее в эту тему углубляться не будем, ограничившись заключительным упоминанием работы Б. М. Левитана [91], в которой методами теории следов для регулярного оператора Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями был изучен примыкающий к обратной задаче вопрос об условиях на спектр, обеспечивающих гладкую периодичность потенциала. Попутно был предложен новый метод вычисления взвешенных регуляризованных следов с помощью функции Римана задачи Коши соответствующего волнового уравнения, основанный на аналогичном методе получения спектральных формул следов работ [82], [92]. Отметим полученное в этой работе утверждение о том, что для бесконечно дифференцируемого потенциала все регуляризованные следы антипериодической задачи равны нулю.

Регуляризованные следы. Общая теория

Все обсуждавшиеся нами задачи не охватывали ДО в частных производных с дискретным спектром. Причин здесь несколько: методы, связанные с наличием у обыкновенных уравнений фундаментальной системы решений, не могли в этих задачах работать в принципе; методы, основанные на использовании асимптотических разложений резольвенты или θ -функции, либо на аналитическом продолжении ζ -функции, требовали существования у собственных чисел точной асимптотики с остаточным членом, по меньшей мере образующим сходящийся ряд, что также не имеет места у операторов в частных производных.

В этой ситуации на первый план стали выходить задачи для абстрактных операторов – вопрос ставился следующим образом: каким требованиям должны удовлетворять дискретный оператор A и подчиненный ему оператор B , с тем чтобы начальный отрезок ряда теории возмущений для собственных чисел оператора $A + B$ являлся регуляризацией этих собственных чисел, достаточной для сходимости регуляризованного следа, и какова точно длина этого отрезка? Связь этого вопроса с фундаментальной идеей расширения понятия следа оказалась наиболее близкой среди всех вариантов постановки задачи, о чем мы уже говорили при обсуждении соотношения (6), но нельзя упускать из виду самостоятельную ценность этой задачи и прямую связь с теорией возмущений дискретного спектра, которая делает всякий результат этого раздела теории следов также и новым результатом теории возмущений.

Длительное время после работ [8], [36], [9] исследований в этом направлении не велось, и только в 1977 году работа В. А. Садовниченко и В. В. Дубровского [15] вновь вернула интерес к этим задачам. В этой работе были доказаны формулы регуляризованных следов всех порядков при возмущении самосопряженного дискретного полуограниченного оператора T оператором P , являющимся относительно ядерным для любой отрицательной степени оператора T , и в качестве примера было рассмотрено возмущение задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольном параллелепипеде Π с соизмеримыми ребрами ИО с финитным ядром $K(x, y) \in C^\infty(\Pi)$.

Вскоре вышла вторая работа этих авторов [16], в которой была усилена абстрактная теорема о следе, что позволило в качестве примера впервые рассмотреть ДО, а именно, формула следа была получена для возмущения оператором умножения на функцию $p(x, y)$ степени $3 + \varepsilon$ оператора Лапласа на двумерном прямоугольнике с условиями Дирихле, и при некоторых ограничениях на потенциал формула приобретает вид, весьма сходный с формулой Гельфанда–Левитана:

$$\sum (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{p(0, 0) + p(a, 0) + p(0, b) + p(a, b)}{16}.$$

В этой же работе формула следа была доказана и для билапласиана, но для потенциалов, ряд Фурье которых содержит конечное число ненулевых слагаемых. Далее эти результаты уточнялись в работах В. А. Садовниченко и его учеников (см. литературу в работах [93], [94]), основной идеей во всех было интегрирование разности резольвент по системе расширяющихся контуров, основным инструментом усиления результатов – уточнение оценки резольвент. Мы ниже обсудим более поздние значительные продвижения на этом направлении, и там подробнее обсудим идеи и технику.

Исследование формул следов в случае конечномерного возмущения было проведено в статье В. А. Садовниченко и В. А. Любишкина [93]. Конечномерные возмущения являются едва ли не важнейшим классом возмущений, многие задачи теории операторов к ним сводятся, в том числе пионерские работы по следам [3], [4] основаны на исследовании конечномерных возмущений. В обсуждаемой работе рассматривалось возмущение самосопряженного дискретно-

го оператора A конечномерным оператором

$$Bu = \sum_{k=1}^r (Au, f_k) g_k, \quad (30)$$

где f_k и g_k – некоторые векторы пространства. Подчеркнем, что так как векторы f_k , вообще говоря, не принадлежат области определения оператора A , то оператор B может быть неограничен. Основной результат работы заключается в доказательстве для оператора A , асимптотика считающей функции которого имеет вид

$$N(\lambda) = c\lambda + O(\lambda^p), \quad c \geq 0, \quad 0 < p < 1,$$

формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\mu_k - \lambda_k) = \sum_{j=1}^r (A^{1-q_j} g_j, A^{q_j} f_j), \quad (31)$$

где $0 \leq q_j \leq 2$, $f_j \in \mathcal{D}(A^{q_j})$, $g_j \in \mathcal{D}(A^{2-q_j})$. Особым достижением являлось включение в формулировку случая $c \neq 0$ в асимптотике $N(\lambda)$. Приведем два примера из этой работы. Первый пример – это возмущение регулярного обыкновенного ДО A одномерным оператором

$$Bu = h(x) \int_a^b G(x_0, \xi) Au(\xi) d\xi = u(x_0)h(x),$$

где $G(x, \xi)$ – функция Грина оператора A , $h(x) \in \mathcal{D}(A^2)$, и здесь (31) дает формулу следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = h(x_0).$$

Второй пример – возмущение самосопряженного эллиптического оператора A порядка m в n -мерной области Ω , $m \geq n$, оператором вида

$$Bu = g(x) \int_M h(\xi) u(\xi) d\xi,$$

где M – гладкое подмногообразие в Ω строго меньшей размерности, $h(\xi)$ – гладкая функция на M , $g(x) \in \mathcal{D}(A^2)$, и из (31) получаем формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \int_M h(\xi) g(\xi) d\xi.$$

Определенное развитие эти идеи получили в работе В. А. Любишкина и И. Д. Цопанова [95], в которой рассмотрено ограниченное возмущение самосопряженного дискретного оператора с $N(\lambda) = O(\lambda^p)$, $0 < p < 1/2$, и разобраны примеры, сводящиеся к этому случаю подобием.

В работе В. В. Дубровского [96] справедливость формулы следа

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0 \quad (32)$$

была установлена для самосопряженного оператора A с $N(\lambda) = O(\lambda^p)$, где $p \leq 1/2$, и ограниченного B , а для возмущения, принадлежащего классу Гильберта–Шмидта, формула была доказана при $p \leq 1$. В продолжении этих исследований [97] автор для случая ограниченного возмущения и $p < 1$ получил формулы следов для степени n собственных чисел, регуляризовав их $l - 1$ поправкой теории возмущений, где $l \geq n/(1 - p)$. Во многом на основе этих абстрактных результатов в серии работ В. В. Дубровского и его учеников (см. [98] и там дальнейшие ссылки) были доказаны формулы следов для степени оператора Лапласа на треугольниках специального вида.

Различные уточнения этих результатов при дополнительных предположениях об асимптотическом поведении и структуре спектра (наличие остаточного члена в асимптотической формуле для собственных чисел и его порядок, существование лагун в спектре и их протяженность и т.п.) были получены в работах [99], [94], [100], [101] с использованием той же техники, выделим здесь работу [101], в которой удалось охватить некоторые классы операторов с неядерной резольventой. Также укажем на исследования А. Г. Баскакова [102], в которых близкие результаты были получены методом подобных операторов, и на близкую по технике более позднюю работу [103].

В несколько отличающейся от [97] по технике оценок поправок теории возмущений работе [104] М. Достанич получил ряд интересных теорем. Рассматриваемые им невозмущенные операторы имеют спектр с особо регулярным поведением, и за счет этого автору удалось, не налагая дополнительных условий на возмущение, получить результаты для операторов с не слишком быстро растущей последовательностью собственных чисел. Формула следа (32) была доказана им для случая, когда

$$c_1 \leq (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/n^{(p-1)/p} \leq c_2, \quad p > 1,$$

та же формула при более слабом условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\lambda_{n+1} - \lambda_k)^{-1} = 0$$

была доказана для случая $N(\lambda) \sim c\lambda^p$, $0 < p < 2/3$. Несколько нестандартная формула второго следа

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n_k} \left(\mu_m^2 - \lambda_m^2 - 2\lambda_m(B\varphi_m, \varphi_m) - \sum_{l=1}^{\infty} (B\varphi_l, \varphi_m)(B\varphi_m, \varphi_l) \right. \\ \left. - \sum_{l=n_k+1}^{\infty} (B\varphi_l, \varphi_m)(B\varphi_m, \varphi_l) \frac{\lambda_l + \lambda_m}{\lambda_l - \lambda_m} \right) = 0 \end{aligned}$$

была доказана в работе для операторов с $N(\lambda) \sim c\lambda^p$, $0 < p < 1/3$, и ограниченным B , а при дополнительных условиях регулярности λ_n при $0 < p < 1/2$. Наконец, отметим, что в этой работе был рассмотрен и случай неограниченных возмущений при регулярности невозмущенного спектра и подчиненности возмущения степени $\beta < 1/2$ невозмущенного оператора.

В 1999 году в нашей работе [105] была выдвинута гипотеза: формула следа (32) верна для A , имеющего ядерную резольventу, и ограниченного B . В самой работе эта формула была доказана для случая (более общего, чем в [104])

регулярного поведения собственных чисел невозмущенного оператора λ_n : последовательность λ_n/n^δ должна быть монотонно возрастающей при некотором $0 < \delta \leq 1$. Однако там было сделано и важное продвижение в доказательстве этой гипотезы в целом: было доказано стремление второй поправки теории возмущений к нулю именно для операторов, удовлетворяющих условиям гипотезы. Вскоре в работе В. А. Садовниченко, С. В. Конягина и В. Е. Подольского [106] была доказана одна фундаментальная лемма о числовых рядах, позволившая доказать стремление к нулю по некоторой системе контуров ядерной нормы резольвенты самосопряженного оператора с ядерной резольventой, что дало вторую важнейшую составляющую доказательства приведенной гипотезы.

В нашей работе [17] был доказан ряд теорем, охватывающих как случай невозмущенного оператора с ядерной резольventой, возмущенного относительно компактным оператором, так и малоизученный случай операторов с неядерной резольventой. Приведем некоторые результаты этой работы.

Если оператор B таков, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и существуют число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор $BA^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, и некоторое число $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, такое, что $A^{-(1-\delta-\omega)}$ – ядерный оператор, то существует подпоследовательность номеров $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что при $\omega \geq \delta/l$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k) d\lambda \right) = 0. \quad (33)$$

В частности, при $\omega \geq \delta$ верна формула (32).

Если A^{-1} – неядерный и существует число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор BA^δ продолжается до ограниченного и $A^{-(1+\delta)}$ – ядерный оператор, то существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=0}^\infty$ такая, что верна формула (32).

Аналогичные приведенным результаты были получены и для специального случая существования “больших” лакун в спектре оператора A , приведем один результат с прозрачной формулировкой: пусть у оператора A существует подпоследовательность его собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ такая, что $\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m} \rightarrow \infty$, пусть оператор $B \in \mathfrak{S}_p$, $p \in \mathbb{N}$, тогда верна формула (33) с $(p-1)$ -й поправкой. Это прямое обобщение известного результата для случая $p = 1$, однако для ядерного возмущения никаких условий на невозмущенный оператор накладывать не требуется (по крайней мере для самосопряженного A). Другие теоремы обсуждаемой работы допускают для возмущений $B \in \mathfrak{S}_p$ стремление к нулю расстояний между собственными числами невозмущенного оператора (поясним на грубом примере: если $B \in \mathfrak{S}_2$, то для выполнения (32) достаточно выполнения условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$). Приведем ряд примеров применения этих абстрактных результатов.

Формула (32) верна для самосопряженного эллиптического ПДО на компактном многообразии, возмущенного ПДО меньшего порядка, если только разность порядков операторов больше размерности многообразия. Рассмотрим в качестве оператора A степень $\alpha > 1$ оператора Лапласа $-\Delta$, действующего в $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в качестве B оператор умножения на ограниченную измеримую (комплекснозначную) функцию $q(x, y)$. Формула первого следа была известна [98] для степени оператора

$\alpha > 93/80$, и доказательство опиралось на тонкие результаты теории чисел. Так как в этой задаче $\lambda_n \sim n^\alpha$, то формула следа верна для $\alpha > 1$ с необходимым вычитанием одной поправки для потенциала $q(x, y) \in C^\beta$ с $\beta > 1$. При этих условиях имеем (исходная формула (32) верна для ограниченного измеримого потенциала, гладкость нужна для абсолютной суммируемости коэффициентов Фурье и существования значений на границе):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_k < n^2 + m^2 < r_{k+1}} \left(\mu_{nm} - (n^2 + m^2)^\alpha - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dy \right) \cos 2nx dx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dx \right) \cos 2my dy \right) \\ & = \frac{1}{16} (q(\pi, \pi) + q(0, \pi) + q(\pi, 0) + q(0, 0)) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy \\ & \quad - \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^\pi (q(0, y) + q(\pi, y)) dy + \int_0^\pi (q(x, 0) + q(x, \pi)) dx \right). \end{aligned}$$

Далее, возьмем в качестве оператора A обыкновенный ДО, действующий в $L_2[0, \pi]$, определяемый выражением $-y^{(6)}$ и краевыми условиями $y(0) = y^{(2)}(0) = y^{(4)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = y^{(4)}(\pi) = 0$, а в качестве B возьмем оператор $q(x)y^{(2)} + p(x)y$ с областью определения $y(0) = y^{(2)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = 0$. Конечно, для обыкновенных операторов все задачи теории решены [11], но вычисления этим методом для оператора порядка выше четвертого практически необозримы. Во введенных обозначениях имеем $\delta = 1/3$, $\omega < 1/2$, и можно выбрать $\omega > \delta$. Таким образом, необходимо вычисление только величины $(B\varphi_n, \varphi_n)$. Так как $\varphi_n = \sqrt{2/\pi} \sin nx$, то соответствующие вычисления несложны, и для $p(x)$ и $q''(x)$, гёльдеровых на окружности с показателем $\alpha > 1/2$, формула следа имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - n^6 + \frac{n^2}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4\pi} (q'(\pi) - q'(0)) \right) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4} (p(0) + p(\pi)) + \frac{1}{8\pi} (q'(\pi) - q'(0)) - \frac{1}{16} (q''(0) + q''(\pi)). \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве A степень $2 + \varepsilon$ оператора $-\Delta$, $\varepsilon > 0$, действующего в $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в качестве B ДО первого порядка $q \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$, где периодические продолжения функций $p'_y(x, y)$, $q'_x(x, y)$ имеют гладкость C^β , $\beta > 1$. Так как $\lambda_n \sim n^{2+\varepsilon}$, то можно взять $\delta = 1/(4 + 2\varepsilon)$ и $\delta + \omega = 1/2$ и, следовательно, можно принять $\omega > \delta$. Подчеркнем, что в этой работе впервые была получена формула следа для возмущения оператора в частных производных оператором в частных производных.

Применение леммы работы [106] в работе [107] позволило получить новый результат в теории возмущений унитарных операторов: для пары унитарных операторов U_j , $j = 1, 2$, с собственными числами λ_{jn} такими, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_{jn} - 1| < +\infty$, доказана формула первого следа и вычислен ответ.

В завершение обсуждения результатов для абстрактных операторов отметим работы Х. Х. Муртазина и З. Ю. Фазуллина [108], [109], в которых доказано, что

формула (32) для самосопряженных операторов (техника работ существенно использует самосопряженность) верна и при более слабом требовании, нежели ядерность резольвенты невозмущенного оператора, а именно при условии $\lambda_n^{-1} = o(n^{-1})$, а также получены новые результаты и для компактных возмущений операторов с неядерной резольвентой.

Как мы уже отмечали во введении, в последние два десятилетия было решено много отдельных важных задач с применением (в той или иной степени) индивидуально разработанных подходов.

Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля (9) долгое время считалась доказанной Л. А. Диким для максимального класса потенциалов. Однако недавно появился ряд работ с усилением этого результата. Предварила их статья В. В. Дубровского [28], в которой были найдены условия абсолютной сходимости ряда разностей собственных чисел. Он представил потенциал в виде суммы двух функций $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$, $q_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2nx$, a_i – коэффициенты ряда Фурье по косинусам функции $q(x)$, и доказал, что если $q_1(x)$ – непрерывная функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье, то ряд разностей собственных чисел сходится абсолютно и $2 \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - n^2) = q_1(0)$.

В 1999 году В. А. Винокуров и В. А. Садовничий [29] доказали, что собственные числа оператора Штурма–Лиувилля являются дифференцируемыми функционалами аргумента $q(x) \in L_1[0, \pi]$ и доказали формулу (8) для суммируемых потенциалов, причем для потенциалов, локальные характеристики которых в окрестностях концов отрезка удовлетворяют условиям сходимости ряда Фурье, по-прежнему верна формула (9).

А. М. Савчук [31] и независимо В. А. Винокуров и В. А. Садовничий [30] рассмотрели оператор Штурма–Лиувилля с “потенциалом” δ -функцией. В работе [31] такой оператор аккуратно определен с помощью квазипроизводных (см. [46]):

$$-(y' - u(x)y)' - u(x)(y' - u(x)y) - u^2(x)y,$$

здесь $u(x) = 1$ при $x \geq \pi/2$, $u(x) = 0$ при $x < \pi/2$, и условия склейки $y'(\frac{\pi}{2} + 0) - y'(\frac{\pi}{2} - 0) = y(\frac{\pi}{2})$, а в [30] аналогичная задача с потенциалом $\sum_i c_i \delta(x - x_i)$ сведена к краевой задаче для интегрального уравнения

$$z(x) = x - \int_0^\pi \nu(x-t)z(t) d(\sigma(t) + \lambda t), \quad z(\pi) = 0,$$

здесь $\sigma(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке, непрерывная справа и непрерывная в граничных точках (фактически $\sigma(t)$ – обобщенная первообразная потенциала и совпадает с $u(t)$ из дифференциального выражения в квазипроизводных работы [31]). В [30] получена общая формула следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - n^2 - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 nx d\sigma(x) \right) = -\frac{1}{8} \sum_i c_i^2,$$

где c_i – величины скачков функции $\sigma(x)$, сумма берется по всем скачкам. Отметим, что в класс потенциалов, охваченных этой работой, попадают функции, интегрируемые по Данжуа–Перрону в узком смысле.

В работе А. М. Савчука и А. А. Шкаликова [32] независимо получены те же результаты, что и в [30], и сверх того при дополнительных условиях гладкости

в граничных точках, наложенных уже на обобщенную первообразную потенциала, доказана суммируемость по Чезаро формулы следа вида (9):

$$(C, 1) \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - n^2) = -\frac{u'(0) + u'(\pi)}{4} - \frac{1}{8} \sum_i c_i^2,$$

при условии дифференцируемости в 0 и π функции $u(x) = \int q(x) dx$.

Ряд интересных результатов был получен и в задачах на неограниченных интервалах. Т. Г. Амангильдин в нескольких работах (см. [110] для дальнейших ссылок) для оператора в $L_2[0, +\infty)$

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad (34)$$

при выполнении следующих условий на потенциал на множестве $x \geq x_0$: $q(x) > 0$, $q^{-1/4}(x)$ – выпукла, $q^{(3)} \geq \varepsilon > 0$, $q^{(4)} \geq 0$, $|(\ln^{-1} q^{(3)}(x))'| < C$, интегралы

$$\int_{x_0}^{\infty} q^{-1/2}(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{x_0}^{\infty} (q'^2(x) q^{-5/2}(x) + q''(x) q^{-3/2}(x)) dx$$

сходятся, доказал, что если возмутить оператор оператором умножения на финитную функцию с нулевым средним, то верна формула $\sum_n (\mu_n - \lambda_n) = -(\tilde{q}(0) - q(0))/4$. Он же рассмотрел задачу (34) в специальном случае $q(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, и для финитного возмущения явно вычислил сумму $\sum (\mu_n - \lambda_n - an^{-2/(2+\alpha)})$.

Г. В. Козлов и В. А. Любишкин [111] рассмотрели оператор

$$(-1)^n y^{(2n)} + (x^\alpha + q(x))y = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

в $L_2[0, +\infty)$, где $q(x) \in C^2$ – финитная функция, а $\alpha > 0$. С применением суммирования по Абелю при $\frac{2n\alpha}{2n+\alpha} > 1$ была доказана формула следа

$$\sum_k \left(\mu_k - \lambda_k - Bk^{-\frac{2n}{2n+\alpha}} \int_0^{+\infty} q(x) dx \right) = \frac{q(0)}{4} - B\zeta\left(\frac{2n}{2n+\alpha}\right) \int_0^{+\infty} q(x) dx,$$

где

$$B = \frac{\alpha}{2n+\alpha} \left(\frac{\pi}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{2n}\right) \right)^{-\frac{\alpha}{2n+\alpha}}.$$

Отдельно в работе доказано, что эта формула верна и для гармонического осциллятора $n = 1$, $\alpha = 2$. Те же авторы в [112] получили для гармонического осциллятора при финитном возмущении $q(x) \in C^4$ второй след. Мы вернемся к обсуждению некоторых результатов о гармоническом осцилляторе ниже, в контексте обсуждения метода суммирования по Абелю регуляризованных следов.

Задачу для ДО высокого порядка на полуоси, заданного дифференциальным выражением

$$(-1)^m y^{(2m)} + p_{2m-2}(x) y^{(2m-2)} + \dots + p_0(x) y$$

и граничными условиями $y(0) = y''(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0$, где $p_{2i}(x)$ – действительные локально интегрируемые функции, рассмотрели недавно

А. И. Козко и А. С. Печенцов [113]. Предполагая о рассматриваемом операторе его дискретность и полуограниченность, они для возмущения оператором умножения на финитную действительнозначную измеримую ограниченную функцию $q(x)$ доказали, что если функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x q(t) dt$$

имеет ограниченную вариацию в некоторой правосторонней окрестности нуля, то верна формула следа

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(t) dt \right) = -\frac{\psi(+0)}{4},$$

$$c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2m}}, \quad c_k = \lambda_k^{\frac{1}{2m}} - \lambda_{k-1}^{\frac{1}{2m}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Отметим, что авторы использовали обсуждавшуюся выше лемму Гасымова [10].

Неполуограниченный случай для оператора (34) исследовал В. А. Любишкин (см. [114]). Он рассмотрел неограниченно убывающий потенциал $q(x) \in C^3[0, +\infty)$ такой, что $q(x) < 0$, $q'(x) < 0$, $q'(x) = O(|q(x)|^{3/2-\varepsilon})$, интегралы

$$\int_0^{+\infty} |q(x)|^{\varepsilon-1/2} dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} (q'^2(x) - q(x)|q''(x)|) |q(x)|^{\varepsilon-5/2} dx$$

сходятся, и возмущением был финитный потенциал. Тогда для заданного k были найдены достаточные условия существования и равенства нулю k -го регуляризованного следа.

Другой тип сингулярности оператора изучен в [115]: в $L_2(-1, 1; (1-x)^\alpha(1+x)^\beta)$, $\alpha, \beta > -1$, рассмотрено возмущение оператора типа Якоби

$$Ty = -(1-x^2)y'' - (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y'$$

оператором умножения на абсолютно непрерывную функцию $p(x)$ и получены формулы следов, например, при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\mu_j - \lambda_j - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(\cos \theta) d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi p(\cos \theta) d\theta - \frac{p(1) + p(-1)}{4}.$$

Аналогично исследован в [100] и оператор типа Лежандра.

В работе В. Е. Подольского [116] в рамках решения обратной задачи для оператора Штурама–Лиувилля по взвешенной ζ -функции для задачи на полуоси при естественных ограничениях на потенциалы $q_i(x)$ доказаны формулы следов всех порядков, например,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)) = h_2 - h_1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)) = h_1^3 - h_2^3 + \frac{1}{4}(q_1'(0) - q_2'(0)) - h_1 q_1(0) + h_2 q_2(0).$$

Отметим конструкцию ζ -функции как суммы трех функций с изначально непесекающимися областями определения:

$$Z_1(s) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \lambda^{-s} d\rho(\lambda), \quad Z_2(s) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \lambda^{-s} d\rho(\lambda), \quad Z_3(s) = \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \lambda^{-s} d\rho(\lambda),$$

здесь $Z_1(s)$ определена во всей плоскости, $Z_2(s)$ определена при $\operatorname{Re} s < 0$ и $s = 0$, $Z_3(s)$ определена при $\operatorname{Re} s > 1/2$. В сумме $Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)$ участвует аналитическое продолжение $Z_3(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > -\beta$, существующее при $q(x) \in C^\beta[0, \delta]$. Можно в очередной раз отметить, что в самых разнообразных методах спектральной теории ДО второго порядка всегда важную роль играет гладкость потенциала в некоторой окрестности нуля.

Замечательное применение метода функций класса K нашла Е. В. Александрова, рассмотрев [117] задачу о малых поперечных колебаниях трубы, находящейся в вязкой среде и несущей установившийся поток несжимаемой жидкости

$$y^{(4)}(1 + \alpha\lambda) + v^2 y'' + 2\beta v \lambda y' + \lambda(\lambda + k)y = 0, \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0,$$

здесь λ – спектральный параметр, прочие числовые параметры имеют физический смысл. В этой задаче со сложным вхождением спектрального параметра характеристический определитель является аналитической функцией с существенной особенностью и спектр имеет две точки накопления. Автор столкнулся с невозможностью разделить соответствующие серии собственных чисел, и в формуле следа появился дефект нумерации $\varkappa$:

$$\sum'_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n + \alpha \pi^4 n^4 + \frac{k\alpha - 1}{\alpha} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{n,\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\beta^2 v^2}{4\alpha} - \frac{\varkappa}{\alpha}.$$

Неизвестно, можно ли в этой задаче занумеровать собственные числа так, чтобы в обеих сериях нумерация совпадала с асимптотической, и хотя автор нашел выражение для дефекта через ζ -функцию задачи, однако сложность конструкции ζ -функции не дает возможности явно вычислить этот дефект.

Метод суммирования по Абелю регуляризованных следов, восходящий к методу В. Б. Лидского [118] суммирования разложений по Абелю, впервые использованный в конкретных задачах В. А. Любишкиным в работах [99], [112], был в более общем виде исследован в статье В. А. Любишкина и В. Е. Подольского [23]. Известно, что для дифференциального полуограниченного самосопряженного эллиптического оператора A порядка m на компактном многообразии размерности n и оператора B умножения на гладкую функцию существует асимптотическое разложение при $t \rightarrow 0+$ следа полугрупп $\exp(-tA)$ и $\exp(-t(A+B))$ по степеням $t^{(j-n)/m}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. В работе при условии $m > n$ было доказано существование и дан полный алгоритм вычисления набора коэффициентов $\{\varkappa_l\}$ таких, что верна формула

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k - \lambda_k + \sum_{l=0}^n \varkappa_l \lambda_k^{-\frac{l}{m}} \right) e^{-\lambda_k t} = \varkappa_{n+1}. \quad (35)$$

Сильный метод суммирования (что само по себе, конечно, недостаток, и всякая возможность избежать его должна тщательно исследоваться) позволяет получать простую регуляризацию канонической структуры – конечным набором степеней собственных чисел невозмущенного оператора. В работе [20] В. Е. Подольский предложил для суммы $\sum_{l=0}^n \varkappa_l \lambda_k^{-\frac{l}{m}}$ термин **слабая асимптотика** (в смысле суммирования по Абелю) последовательности μ_n , а в работе [119] он же распространил эту технику на степенно-логарифмические асимптотики.

Суммирование по Абелю регуляризованных следов было применено в работе Б. Саймона с сотрудниками [24], мы вернемся к ней в дополнении, посвященном формуле Крейна. Крайне интересным представляется изучение связи теории регуляризованных следов и различных методов суммирования с теориями регуляризаций и перенормировок в различных разделах современной физики, например, в работе [120] рассматриваются весьма интересные вариации на тему суммирования посредством ζ -функции и θ -функции в задаче о вычислении энергии Казимира. Таким задачам¹⁰ посвящено в последние годы немало работ, цитирование которых выходит за рамки нашего обзора, укажем лишь на обзор [121], содержащий описание нескольких приложений теории к физическим и математическим задачам.

Суммирование по Абелю было применено в [122] к одномерному гармоническому осциллятору и его ограничению на полуось: при возмущении оператором умножения на функцию $p(x) = q(x)/x^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, где $|q(x) - q(0)| < C_1 x^{\delta_1}$ при $x \leq A$, $\delta_1 > \alpha$ и $|q(x)| \leq C_2/x^{\delta_2}$ при $x > A$, $\delta_2 > 2 - \alpha$, была доказана справедливость формулы следа

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \left(\mu_n - \lambda_n + \frac{q(0) \Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \lambda_n^{-1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{2\lambda_n^{-\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} q(t) t^{-\alpha} dt \right) \\ = \frac{4\Gamma(\frac{1-\alpha}{2}) Z(1 - \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi \sqrt{\pi} (2 - \alpha)} q(0) - \frac{4}{\pi \sqrt{\pi}} Z\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{+\infty} q(t) t^{-\alpha} dt, \end{aligned}$$

где $Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (4k+3)^{-s}$. Позже Е. В. Александрова [123], действуя аналогично методу работы [19], для более узкого класса потенциалов сняла суммирование в этой формуле.

Другим методом, более близким классическому использованию ζ -функции, основываясь на точных асимптотиках для собственных чисел, недавно формулы следов всех порядков для одномерного гармонического осциллятора получили А. Пушницкий и Я. Соррель [124], разумеется, для гладкого потенциала. Однако отметим, что получение асимптотик базируется на разложении для θ -функции, полученном в работе М. Хитрика и И. Полтеровича [125].

Завершая обсуждение современного состояния метода суммирования по Абелю регуляризованных следов, отметим работу В. Е. Подольского [126], в которой изучение и применения метода были перенесены с ДО и ПДО на абстрактные операторы. В качестве невозмущенного оператора рассматривается генератор аналитической полугруппы, вообще говоря, несамосопряженный, и

¹⁰ Например, просто в контексте основных формул регуляризованных следов типа (5) и (6) интересна формальная с точки зрения математика цепочка равенств (так как интерес эта цепочка вызывает в случае неограниченности оператора A) $\sum(\varphi_i, A\varphi_i) = \text{Tr } A = \sum \lambda_i = \sum \lambda_i^{-s} \big|_{s=-1} = \zeta A(-1)$ для квантовой энергии вакуума.

в работе получен ряд оценок ядерной нормы полугрупп, даны условия сходимости ряда теории возмущений полугрупп

$$e^{-t(A+B)} = e^{-tA} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A} B \dots B e^{-t_k A} dt_k \dots dt_1$$

в ядерной норме на отрезках, включающих точку 0. Эти результаты применены к доказательству формул следов и асимптотик возмущенной полугруппы в нуле. Доказано выполнение формулы

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n - (B\varphi_n, \varphi_n)) e^{-\lambda_n t} = 0$$

при выполнении условия $|\lambda_n|^{-1} = o(n^{-1})$ и ограниченном возмущении (ср. с результатами работы [109], в которой аналогичная формула получена без суммирования по Абелю, но для самосопряженного случая). Также в работе найдены достаточные условия на пару операторов, позволяющие в общем виде получать асимптотику следа возмущенной полугруппы

$$\mathrm{Tr} e^{-t(A+B)} = \mathrm{Tr} e^{-tA} - t \mathrm{Tr}(B e^{-tA}) + \frac{t^2}{2} \mathrm{Tr}(B^2 e^{-tA}) + O(t^\omega), \quad t \rightarrow +0,$$

с эффективно найденным остаточным членом и, вообще говоря, неограниченным возмущающим оператором B ; например, для двумерного оператора Лапласа с комплексным (не обязательно бесконечно гладким) потенциалом $\omega = 3/2$.

Еще в середине 60-х годов И. М. Гельфанд указывал на оператор Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере как на следующий принципиальный рубеж для теории следов дискретных операторов. Оператор Лапласа–Бельтрами на компактных симметрических пространствах ранга 1 (это сферы и проективные пространства) естественно возникает при делении переменных у многомерного гармонического осциллятора; мы рекомендуем читателю за дальнейшими подробностями (связанными со спектральной геометрией, статистической физикой, следами и т.п.) обратиться к монографии Н. Харта [127]. Предваряя обсуждение конкретных результатов, укажем на то, что оператор Лапласа на сфере является стандартным примером, подтверждающим неулучшаемость оценки Л. Хёрмандера остаточного члена асимптотики $N(\lambda) = a\lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1)/m})$ для эллиптического ДО, здесь m – порядок оператора, n – размерность многообразия. Причина этого в неограниченно возрастающей кратности “редко” расположенных собственных чисел, однако именно это позволяет изучить распределение собственных чисел в группе, образующейся после возмущения из кратного собственного числа. Получающиеся формулы следа могут в некоторых задачах служить частичной компенсацией неуточняемости оценки остатка в формуле для $N(\lambda)$.

Первые результаты по этой задаче получил в 1983 году В. В. Дубровский [128] для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере потенциалом некоторого специального класса, затем в 1991 году В. А. Садовничий и

В. В. Дубровский (полное доказательство и ссылки см. в [18]) доказали формулу со скобками первого регуляризованного следа для оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере, возмущенного гладким нечетным комплекснозначным потенциалом $q(x)$. В 1994 году В. Е. Подольский [19], применив к этой задаче суммирование по Абелю и затем к полученной формуле таубероу теорему Литлвуда, доказал, что ряд сходится без скобок, далее А. Н. Бобров и В. Е. Подольский [129], точно исследовав абсолютную и условную сходимости регуляризованных следов степеней оператора Лапласа, в частности, доказали, что полученный в [19] ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} q^2(x) dS \quad (36)$$

сходится абсолютно.

Перейти от нечетного потенциала к произвольному и на сферы любой размерности удалось В. Е. Подольскому [20], он доказал формулы следов со скобками всех порядков, а также просуммированные по Абелю для любого гладкого потенциала и на сферах любой размерности. В этой работе впервые были получены следы операторов в частных производных в случае, когда порядок оператора меньше размерности многообразия.

А. Н. Бобров [130] рассмотрел задачу в общей постановке: для пары (оператор, многообразие) такой, что все траектории гамильтонова потока, индуцированного оператором на многообразии, замкнуты, он получил формулы следов всех порядков со скобками и просуммированные по Абелю. Приведем одну из явно вычисленных формул. На поверхности Цолля, определяемой заданием на сфере S^2 метрики $g = (1 + h(\cos \theta))^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, где $C^\infty \ni h: [-1, 1] \rightarrow (-1, 1)$ – некоторая нечетная функция, $h(1) = 0$, для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами, возмущенного гладким потенциалом $q(\theta, \varphi)$, верно

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} \left(\lambda_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi q(\theta, \varphi) (1 + h(\cos \theta)) \sin \theta d\theta d\varphi \right) \\ &= -\frac{1}{24\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\Delta q(\theta, \varphi) - 2q(\theta, \varphi)(\gamma(\theta) + 1) + 3q^2(\theta, \varphi)) \\ & \quad \times (1 + h(\cos \theta)) \sin \theta d\theta d\varphi \\ & \quad + \frac{1}{30} \int_0^\pi (1 - \Delta\gamma(\theta) - \gamma^2(\theta))(1 + h(\cos \theta)) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (37)$$

здесь $\gamma(\theta) = (1 + h(\cos \theta) - \cos \theta h'(\cos \theta)) / (1 + h(\cos \theta))^3$ – гауссова кривизна рассматриваемой поверхности. В этой формуле впервые был явно просчитан случай произвольного, а не только нечетного потенциала на сфере (каноническая сфера соответствует $h \equiv 0$), и, что особенно примечательно, в случае, когда $q(\theta, \varphi) \equiv 0$, формула становится чисто геометрической. Также на этот общий случай были распространены результаты [129], а именно для рядов с единой

(по возрастанию) нумерацией собственных чисел вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu_n^{\alpha} - \lambda_n^{\alpha} - \sum_{j=0}^{2[\alpha]+n-1} \chi_j(\alpha) \lambda_k^{-(j-2\alpha)/2} \right),$$

для которых доказана суммируемость по Абелю, точно исследовано, при каких α этот ряд сходится абсолютно, при каких условно и при каких расходится.

Значительные трудности приносит в эту задачу отказ от бесконечно дифференцируемых потенциалов, так как тогда нельзя применять технику теории ПДО. Прямым исследованием поправок теории возмущений В. А. Садовническому и З. Ю. Фазуллину [131] удалось получить формулы следов для оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере при условии принадлежности потенциала классу дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Многомерные дискретные операторы, действующие в L_2 на всем пространстве, являются одной из наиболее трудных задач современной теории. В работе В. А. Любишкина [132] рассматривалось возмущение оператора двумерного гармонического осциллятора $-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_1^2 + x_2^2$ оператором умножения на гладкую финитную зависящую только от радиуса функцию, обращающуюся в нуль в окрестности нуля. Из-за симметричности возмущения этот случай мало отличается от одномерного, но даже это явилось заметным продвижением вперед. З. Ю. Фазуллин и Х. Х. Муртазин [133] рассмотрели возмущение того же оператора оператором умножения на финитную функцию $q(x_1, x_2) \in C_0^4(\mathbb{R}^2)$ и доказали следующую формулу первого следа:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (\mu_{kn} - \lambda_{kn}) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \left(q(x_1, x_2) - \frac{1}{2} q^2(x_1, x_2) - (x_1^2 + x_2^2) q(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Х. Х. Муртазин и З. Ю. Фазуллин исследовали еще одну интереснейшую задачу математической физики [134] – они изучили спектр и получили формулу следа для двумерного оператора Шрёдингера в однородном магнитном поле:

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \right)^2 + V(x_1, x_2),$$

здесь V – электрический потенциал. При $V \equiv 0$ спектр оператора состоит из чисел $\lambda_n = 2(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, причем каждое бесконечнократно. В работе рассмотрено возмущение V – вещественная функция из $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ такая, что оператор умножения на V является относительно компактным возмущением (например, достаточно $V \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$). Тогда спектр возмущенного оператора можно разбить на серии $\{\mu_n^m\}_{m=-n}^{\infty}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, так, что при финитной V имеет место сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=-n}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n^m) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Несколько позже независимо аналогичный результат получили Е. Коротаев и А. Пушницкий [135].

Едва ли не единственные примеры явно вычисленных формул следа для компактного оператора даны в статье М. Достанича [136]. Для ИО

$$Af(x) = \int_{-1}^1 |x-y|^{\alpha-1} f(y) dy, \quad 0 < \alpha < 1,$$

формула следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \frac{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi^{\alpha} n^{\alpha}} \right) = -4^{\alpha} \zeta(1-\alpha)$$

получена автором с помощью представления A в виде суммы $B+R$, где B есть ИО с ядром

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|x-y+4n|^{\alpha-1} - |x+y+4n+2|^{\alpha-1}),$$

а R имеет сингулярные числа, убывающие быстрее любой степени. Для оператора

$$Lf(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |x-y| f(y) dy$$

в этой работе предъявлена формула

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2 n^2}} \right) = -\gamma - \ln 2 - \sqrt{2} \int_0^{\infty} \left(t + \frac{t^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} (e^{4(1+t)} - 1)^{-1} dt,$$

где γ – постоянная Эйлера.

Техника ПДО впервые была использована в теории следов Ю. В. Коганом [137], В. Е. Подольским [138] и затем А. Н. Бобровым и В. Е. Подольским в работах об операторе Лапласа–Бельтрами на многообразиях с периодическим геодезическим потоком. Характерным примером применения этой техники можно считать работу А. Н. Боброва [139], где исследованы граничные задачи для операторов в частных производных со спектральным параметром в граничных операторах и в качестве примера рассмотрена классическая задача Стеклова об установившейся температуре

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad u'_n(x) = \lambda g(x) u(x) \quad \text{при } x \in \partial\Omega,$$

где Ω – ограниченная односвязная область на плоскости с границей $\partial\Omega \in C^{\infty}$, n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $g(x) > 0$, $g(x) \in C^{\infty}(\partial\Omega)$ (в [137] эта задача рассматривалась при $g(x) \equiv 1$). Формула следа в этой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_{2n} + \lambda_{2n+1} - 4\pi n \left(\int_0^{2\pi} a(x) dx \right)^{-1} \right) \\ = \frac{1}{12\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(b'(x)a(x) - a'(x)b(x))^2 - a^2(x)b^2(x)}{b(x)a^3(x)} dx + \frac{\pi}{3 \int_0^{2\pi} a(x) dx}, \end{aligned}$$

где $a(x) = g(F(e^{ix}))$, $b(x) = |W'(F(e^{ix}))|$, W – конформное отображение области Ω на единичный круг, F – обратное к W отображение.

Дополнение 1. Функция спектрального сдвига и формула Крейна

В 1947 году в работах [140], [141] И. М. Лифшиц рассмотрел возмущение спектра дискретных операторов при конечномерном возмущении и нашел некоторые формулы и количественные соотношения для величины сдвига собственных чисел, причем во второй работе им было рассмотрено семейство операторов, зависящее от малого параметра α так, что предельный оператор имеет непрерывный спектр, и полученные соотношения для возмущенного спектра были подвергнуты еще и асимптотическому анализу по α . В этих работах впервые появилась функция спектрального сдвига¹¹ $\xi(\lambda)$ и были получены формулы для нее в случае конечномерного возмущения. Далее И. М. Лифшиц продолжил эти исследования и в статье [3] применил их к задаче о вычислении следа оператора $F(L + \Lambda) - F(L)$, где L – невозмущенный эрмитов оператор, Λ – конечномерный оператор возмущения, а $F(x)$ – некоторая (принадлежащая достаточно широкому классу) функция, и получил (с применением не вполне корректных рассуждений) формулу (7). Заслуживает особого внимания физический пример, рассмотренный в работе: если за L обозначить оператор, описывающий колебания кристаллической решетки, то свободная энергия колебаний записывается в виде $F = \text{Tr } \Phi(L)$, где

$$\Phi(\lambda) = \theta \ln(1 - \exp(-\hbar\sqrt{\lambda}/\theta)) + \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\lambda}, \quad (38)$$

θ – температура, $\hbar$ – постоянная Планка, и полученная формула следа позволила вычислить изменение свободной энергии колебаний кристаллической решетки при внесении чужеродной примеси в кристалл.

Вскоре после работы И. М. Лифшица [3] в 1953 году вышла знаменитая работа М. Г. Крейна [4], в которой формула следа работы [3] получила строгое обоснование. М. Г. Крейн доказал, что для самосопряженного оператора H и самосопряженного ядерного возмущения T верна формула

$$\text{Tr}(\Phi(H + T) - \Phi(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda) d\lambda, \quad (39)$$

где ф.с.с. $\xi(\lambda)$ зависит только от пары H и T , для нее М. Г. Крейном было найдено представление

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg D_{(H+T)/H}(\lambda + i\varepsilon)$$

почти всюду на $\mathbb{R}$, здесь $D_{(H+T)/H}(z)$ – определитель возмущения, функция $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$\Phi(\lambda) = \int_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{d\mu(z)}{\lambda - z}, \quad \int_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{|d\mu(z)|}{|\text{Im } z|^k} < \infty, \quad k = 1, 2,$$

$\mu(z)$ – вполне аддитивная комплекснозначная функция на ограниченных борелевских множествах из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Для $\xi(\lambda)$ верны оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \|T\|_1 \quad (40)$$

¹¹ниже – ф.с.с.

и равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \text{Tr } T. \quad (41)$$

За (39) в дальнейшем закрепилось название формулы следа Крейна.

Прямое обобщение формулы Крейна стало одним из важных направлений развития теории следов. Формула обобщалась расширением семейства функций $\Phi(\lambda)$, с одной стороны, и расширением классов пар операторов H и T с другой; первоначально формула (39) не распространялась, например, на $\Phi(\lambda) = \lambda$, хотя в этом случае оператор $\Phi(H + T) - \Phi(H)$ ядерный по предположению (конечно, в силу (41) формула (39) верна и в этом случае, и подобное “распространение” делалось явочным порядком, мы здесь имеем в виду то, что функция $\Phi(\lambda) = \lambda$ не включалась естественным образом в класс функций, для которых формула (39) была строго доказана), и даже на $\Phi(\lambda)$ (38) из примера работы Лифшица. Первые обобщения сделал сам М. Г. Крейн, в той же работе предложив вариант формулы (39) в виде предела по некоторой последовательности операторов, что было абстрактным (и более аккуратным) вариантом предельного перехода по малому параметру α из работ Лифшица. В следующей работе М. Г. Крейна по этой теме [142] формула (39) была распространена на функции $\Phi(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$ такие, что имеет место представление

$$\Phi'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\omega(t), \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |d\omega(t)| < \infty.$$

В этот класс функция $\Phi(\lambda) = \lambda$ вошла уже естественным образом. Также в работе [142] формула следа была распространена на пары унитарных операторов и далее, с помощью преобразования Кэли, на некоторые классы пар резольвентно сравнимых операторов. Конечно, ф.с.с. удовлетворяла при этом более жесткому, чем (40), условию и формула следа была верна для другого класса функций $\Phi(\lambda)$.

Вся ранняя и значительная часть дальнейшей истории исследования ф.с.с. и формулы следа Крейна хорошо изложена в обзоре 1994 года М. Ш. Бирмана и Д. Р. Яфаева [6], а в монографии [5] дано полное и строгое изложение классической теории, поэтому далее мы ограничимся кратким указанием на основные работы и обзором работ, не попавших в [6].

Сразу вслед за статьей [142] вышла работа [143], содержащая знаменитую формулу Бирмана–Крейна, связавшую ф.с.с. с матрицей рассеяния $S(\lambda)$ (см. ниже формулу (47)) в абстрактной постановке задачи рассеяния:

$$\det S(\lambda) = e^{-2i\pi\xi(\lambda)}. \quad (42)$$

Эта формула может трактоваться и как вариант формулы следа, из нее можно получить формулы Л. Д. Фаддеева и В. С. Буслаева [12], [13], [68] для задач рассеяния ДО второго порядка; также в этом контексте упомянем последний параграф уже обсуждавшейся работы И. М. Лифшица [141], в котором в качестве приложения развитой теории автор рассмотрел “колебания кристаллической решетки, испорченной находящимся в ней чужеродным атомом”, и ограничимся цитатой: “Таким образом при переходе через местное искажение решетки волна ... меняет свою фазу на $2\pi\xi$ ”.

Ряд авторов вместо условий резольвентной сравнимости операторов использовали удобное в приложениях условие ядерности часто встречающегося в теории возмущений оператора $T(H - \lambda E)^{-1}$, среди первых таких работ отметим [12], [13]. Интересный вариант этого условия рассмотрел В. А. Яврян [144]: в случае ядерности оператора $(H - \lambda E)^{-1/2}T(H - \lambda E)^{-1/2}$ он ввел модифицированный определитель возмущения, определил ф.с.с. и доказал формулу следа. На основе этого результата автору удалось получить обобщение результатов работ [12], [13].

Важное продвижение сделал Л. С. Коплиенко [145], рассмотрев случай принадлежности оператора T классу Гильберта–Шмидта. Используя регуляризованный определитель возмущения, он для некоторого класса функций $\Phi(\lambda)$ доказал существование функции $\theta(\lambda) \in L_1(\mathbb{R})$, зависящей только от пары операторов, такой, что верна формула

$$\mathrm{Tr}(\Phi(H + T) - \Phi(H) - \Phi'_\varepsilon(H + \varepsilon T)|_{\varepsilon=0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\lambda) \Phi''(\lambda) d\lambda. \quad (43)$$

Позже в работе [146] формула (43) была распространена на случай резольвентной сравнимости возмущенного и невозмущенного операторов по модулю операторов Гильберта–Шмидта, еще одно интересное обобщение было получено в статье [147] с использованием другого метода – анализа операторной функции $\exp(it(H + \varepsilon T))$ малого параметра ε . В этой работе для более широкого (в частности, содержащего неаналитические функции) класса функций была доказана формула (43) и, кроме того, некоторые аналогичные результаты для возмущений $T \in \mathfrak{S}_p$, $p > 2$.

Глубокие результаты в теории имеются в направлении, связанном с отказом от самосопряженности или унитарности операторов. Различные аналоги ф.с.с. и формулы следов рассматривались для диссипативных операторов и сжимающих операторов в значительном количестве работ, мы ограничимся ссылкой на работу А. В. Рыбкина [148], изложение истории вопроса в которой является хорошим обзором этой части теории.

Из более поздних работ, посвященных теории ф.с.с. и ее приложениям, выделим работу А. Полторацкого [149], в которой детальное исследование ф.с.с. применено к исследованию устойчивости относительно одномерных возмущений свойства оператора иметь чисто точечный спектр, две работы А. Б. Пушницкого [150], [151], в первой из которых для ф.с.с. при неотрицательных возмущениях оператора получено новое интегральное представление, поточечные оценки и достаточное условие ее непрерывности, а во второй для возмущения оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$ с переменной римановой метрикой и электромагнитным полем оператором умножения на функцию $V(x)$ получены новые интегральные оценки для ф.с.с. в терминах $V(x)$. В работе [152] Е. Коротаев и А. Пушницкий получили формулы следов для возмущенного оператора Штарка. В. Мюллер [153] провел интересное исследование в теории рассеяния, используя формулу Крейна и связь между ζ -функцией и θ -функцией для определения “относительной” ζ -функции и глубоко исследовав на этом пути регуляризованные определители возмущения. Отметим явную переключку этого с выше обсуждавшимся для дискретных операторов методом суммирования следов по Абелю.

Из большого цикла работ, имеющих непосредственное отношение к обсуждаемой теме, выполненных Б. Саймоном с группой сотрудников, в обзор [6] успели попасть лишь несколько первых, 1987–88 годов, в которых формулы следа вновь нашли применение для исследования индекса, на этот раз в рамках современных математических моделей в квантовой механике, мы вернемся к ним в дополнении 3. Позже в цикле работ (см. работы [24], [154] и приведенные там дальнейшие ссылки) та же исследовательская группа обратилась к изучению ДО второго порядка, заданных на всем пространстве. Одной из центральных целей был перенос формул следа типа Левитана в периодической задаче, которая, как уже отмечалось выше, в каком-то смысле решает обратную задачу, на непериодический случай. Заметим, что по существу первый шаг на этом пути был сделан в уже упоминавшейся статье [90]. В работе [24] рассмотрен оператор

$$Hy = -y'' + V(x)y,$$

действующий в $L_2(-\infty, +\infty)$ с непрерывным и ограниченным снизу потенциалом, и оператор H_x , заданный тем же дифференциальным выражением и действующий в $L_2(-\infty, x) \oplus L_2(x, +\infty)$ с условием Дирихле в точке x . Тогда разность резольвент этих операторов одномерна и для них существует ф.с.с. $\xi(x, \lambda)$. Формула следа, доказанная в работе, имеет вид

$$V(x) = E_0 + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{E_0}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda} (1 - 2\xi(x, \lambda)) d\lambda, \quad (44)$$

где E_0 – лежащее ниже спектра оператора H число. Эта формула близка формулам типа Фаддеева [12] или Гасымова [10], особенно если рассматривать их на полуоси с началом в произвольной точке x , общность потенциала в данном случае, по-видимому, объясняет присутствие в формуле аналога суммирования по Абелю. Во всяком случае, для оператора с чисто дискретным спектром неизбежность суммирования показана в работе. Аналогичный результат получен и для бесконечной матрицы Якоби. Также в работах этой группы сотрудников Б. Саймона, а также в работах А. В. Рыбкина (см. [155] и дальнейшие ссылки) исследовались и различные (в том числе необходимые и достаточные) условия существования формул следов, их суммируемости, абсолютной сходимости.

В завершение обсуждения формулы Крейна мы остановимся на вопросе, впервые поставленном И. М. Гельфандом в 1956 году [26]: установить прямую связь формул следа типа Крейна и типа Гельфанда–Левитана. Поясним, о чем идет речь.

В формуле Крейна из двух операторов H и $H + T$ конструируется **один ядерный** оператор $\Phi(H + T) - \Phi(H)$ и далее находится выражение для его следа, ценность которого в четком разделении вклада исходной пары операторов, определяемого их ф.с.с., и вклада самой конструкции этого ядерного оператора, определяемой функцией $\Phi(\lambda)$.

В формуле типа Гельфанда–Левитана речь всегда идет о двух операторах, никакой ядерности разности операторов не предполагается по самому смыслу задачи, а находится явное выражение для некоторой числовой характеристики – суммы разностей собственных чисел (при необходимости дополнительно регуляризованной), другими словами, геометрия действия операторов в гильбертовом пространстве игнорируется.

Таким образом, интуитивное ожидание связи между этими формулами, подкрепляемое некоторыми конкретными примерами и формальными выкладками, при строгом взгляде входит в противоречие с явными существенными различиями в них. В силу этого печатных попыток ответить на вопрос Гельфанда почти не было, а известные нам устные ограничивались прослеживанием аналогий (подчас весьма глубоких) в конкретных примерах. Характерная же печатная попытка предложена в работе [99] на основе формулы (43). Сразу отметим, что эта формула по структуре неприемлема для класса функций $\Phi(\lambda)$, включающего в себя $\Phi(\lambda) = \lambda$, так как, сохраняя формальную справедливость и в этом случае, формула вырождается до равенства тождественных нулей. В [99] формально из (43) выведено равенство

$$\mathrm{Tr}(\Phi(H + T) - \Phi(H) - \Phi'_\varepsilon(H + \varepsilon T)|_{\varepsilon=0}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(\lambda) d\theta(\lambda),$$

и подстановкой $\Phi(\lambda) = \lambda$ получено (формально и при дополнительных предположениях неясного происхождения)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta(\lambda) = 0 = \sum (\mu_n - \lambda_n - (T\varphi_n, \varphi_n)).$$

Подобные манипуляции и подгонку под известный ответ вряд ли можно считать приемлемыми. Мы выскажем свою [156] точку зрения на этот вопрос, ограничившись двумя классическими примерами – исходной формулой Гельфанда–Левитана (4) для обсуждения дискретного случая и формулой Фаддеева (13) для случая непрерывного спектра (для простоты полагая, что при возмущении дискретный спектр не появляется). Мы увидим, что обсуждаемая связь формул, с одной стороны, обладает определенным единством для операторов с произвольной природой спектра, но, с другой стороны, есть существенные различия в зависимости от того, являются рассматриваемые операторы дискретными или нет.

Итак, рассмотрим два самосопряженных дискретных оператора A_1 и A_2 с собственными числами $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ соответственно и с собственными векторами $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, образующими два ортонормированных базиса. Тогда существует унитарный оператор U , определяемый действием на базисе $U\psi_n = \varphi_n$, такой, что операторы A_1 и UA_2U^{-1} коммутируют. Так как спектр оператора является унитарным инвариантом и так как для пары дискретных операторов ф.с.с. есть разность считающих функций $N_i(\lambda)$, то для ф.с.с. $\xi(\lambda, A_1, A_2)$ пары A_1 и A_2 и ф.с.с. $\xi(\lambda, A_1, UA_2U^{-1})$ пары A_1 и UA_2U^{-1} верно равенство

$$\xi(\lambda, A_1, A_2) = \xi(\lambda, A_1, UA_2U^{-1}). \quad (45)$$

Это равенство позволяет для дискретных операторов дать следующее обобщение формулы Крейна, которое правильнее сформулировать в виде определения, опирающегося на классические результаты: если для пары дискретных операторов $H + T$ и H существуют унитарный оператор U и класс функций $\Phi(\lambda)$ такие, что оператор $(\Phi(U(H + T)U^{-1}) - \Phi(H))$ ядерный, то регуляризованным следом пары операторов $\Phi(H + T)$ и $\Phi(H)$ называется величина

$$\mathrm{Tr}(\Phi(U(H + T)U^{-1}) - \Phi(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda, \quad (46)$$

причем в силу (45) можно считать, что в (46) стоит ф.с.с. операторов $H + T$ и H . Применение к оператору (3) тривиально: если (как и предполагали авторы [7]) среднее потенциала на отрезке равно нулю, то $\mu_n = n^2 + O(1/n^2)$ и ясно (в силу абсолютной сходимости ряда из остаточных членов), что этот оператор унитарно эквивалентен оператору $-d^2/dx^2$ с теми же краевыми условиями, возмущенному ядерным оператором, и тогда формула (46) применима с функцией $\Phi(\lambda) = \lambda$, причем (в несколько вольных обозначениях)

$$\mathrm{Tr} \left(U \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right) U^{-1} + \frac{d^2}{dx^2} \right) = \sum (\mu_n - n^2).$$

Заметим, что способ вычисления левой части до окончательного ответа неочевиден, и хотя в данном случае его, по-видимому, можно найти с помощью операторов преобразования, вряд ли он будет проще даже метода оригинальной работы [7]. Однако отметим, что работы [138], [20], [130], [129] по существу опирались именно на идею формулы (46).

Для операторов с непрерывным спектром это рассуждение не годится – хотя спектр и является унитарным инвариантом, однако ф.с.с. в этом случае таковым не является: например, если оператор второго порядка возмутить таким убывающим потенциалом, что дискретный спектр не появляется, то этот оператор унитарно эквивалентен невозмущенному, и равенство (45) не имеет места, а верно $\xi(\lambda, A_1, U A_2 U^{-1}) = 0$. Однако хорошо известно, что среди осуществляющих эту унитарную эквивалентность операторов можно выделить два оператора $U^{(\pm)}$, называемых волновыми операторами,

$$U^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iA_2 t} e^{-iA_1 t}, \quad (47)$$

таких, что оператор рассеяния $S = U^{(+)*} U^{(-)}$ содержит всю информацию о ф.с.с.; собственно, в этом и состоит основной результат работы [143], см. (42). Дальнейшая связь с формулой Фаддеева хорошо известна и уже нами обсуждалась.

Таким образом, в обоих случаях связь между двумя типами формул следов осуществляется с помощью правильно примененных унитарных преобразований, и любопытна возникающая при этом “зеркальность”: в дискретном случае унитарный оператор полностью сохраняет нужную информацию в самих операторах, в непрерывном, напротив, полностью уничтожает, забирая ее при этом в себя.

Дополнение 2. ζ -функция, θ -функция, некоммутативный вычет и спектральная асимметрия

Три числовые функции, определенные на спектре оператора (или на дополнении к спектру):

ζ -функция оператора A с собственными числами λ_n , определяемая равенством

$$\zeta_\gamma(s) = \sum \lambda_n^{-s} = \mathrm{Tr} A^{-s}, \quad (48)$$

где γ – аргумент луча, участвующего в выборе ветви логарифма при определении комплексных степеней чисел λ_n (аналогичный смысл имеет индекс γ ζ -функции (19));

θ -функция

$$\theta(t) = \sum e^{-t\lambda_n} = \text{Tr } e^{-tA}; \quad (49)$$

и след резольвенты

$$\rho(\lambda) = \sum (\lambda_n - \lambda)^{-1} \quad (50)$$

используются при исследовании распределения дискретного спектра оператора очень давно, мы ограничимся ссылкой на обзор Г. Вейля [157]. Хотя исследование любого из объектов (48), (49), (50) имеет самостоятельную ценность, так как проводится различной техникой и охватывает различные классы операторов, в большинстве случаев в силу известных связей

$$\Gamma(s)\zeta_\gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\theta(t) dt, \quad \rho(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{t\lambda}\theta(t) dt$$

достаточно знать свойства какой-либо из этих функций, и мы далее ограничимся обсуждением ζ -функции.

В современной теории основополагающей работой считается статья Р. Т. Сили [158], в которой комплексные степени

$$A_\gamma^{-s} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-s} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \quad (51)$$

были определены для весьма широкого класса эллиптических ПДО на многообразиях без края (γ указывает на аргумент входящего в контур Γ луча). В этой работе было детально изучено аналитическое продолжение интегрального ядра семейства операторов (51) как вне диагонали, так и на ней, и исследована ζ -функция с предъявлением явных рекуррентных формул для вычетов ζ -функции в полюсах и значений в целых точках при регулярности в них функции. Мы считаем необходимым отметить уже обсуждавшиеся в связи со следами работы Л. А. Дикого [33], [34] и В. А. Садовниченко [42]: Л. А. Дикий построил комплексные степени оператора Штурма–Лиувилля по сути техникой ПДО задолго до ее возникновения, а В. А. Садовничий, продолжив эти исследования, распространил технику и результаты на обыкновенные ДО высоких порядков. Подчеркнем, что речь идет о краевых задачах, а в очень близкой по технике более поздней работе Р. Т. Сили хотя и охвачены операторы в частных производных, но рассмотрены задачи на многообразиях без края. Также, безусловно, необходимо отметить в контексте теории ζ -функций работу В. С. Буслая и Л. Д. Фаддеева [13], в которой впервые ζ -функция была построена для оператора с непрерывным спектром.

Дальнейший путь развития теории во многом был определен этой работой Сили, отметим здесь монографию М. А. Шубина [159], в которой можно найти содержательную библиографию и ее обсуждение, цикл работ М. Ф. Атьи, В. К. Патоди и И. М. Зингера (см. завершающую работу цикла [160]), П. Б. Джилки [161]. Выделим здесь введенное В. А. Садовничим понятие взвешенной ζ -функции [52], которая может нести в себе всю информацию об операторе (см., например, [116]).

Часть авторов в исследованиях ζ -функции опиралась на теорию некоммутативного вычета. Дадим его определение. Пусть A – классический ПДО,

действующий в сечениях векторного расслоения на гладком замкнутом многообразии M размерности n , $a(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x, \xi)$ – его полный символ¹², и тогда в случае, если среди чисел $m - j$ есть число $-n$, определим на M плотность

$$\text{res}(x; A) = \left(\int_{|\xi|=1} a_{-n}(x, \xi) dS_{\xi} \right) dx,$$

в ином случае положим $\text{res}(x; A) \equiv 0$. Некоммутативным вычетом оператора A называется число

$$\text{res } A = \int_M \text{Tr } \text{res}(x; A).$$

Отсылая читателя за подробностями и дальнейшими ссылками к работе М. Водзицкого [162], отметим, что понятие и свойства некоммутативного вычета позволяют строить аналитическое продолжение интегральных ядер некоторых типов голоморфных оператор-функций, в частности, комплексных степеней операторов и, более общо, операторов вида BA^{-s} . Связанная с этой оператор-функцией обобщенная ζ -функция $\text{Tr}(BA^{-s})$ имеет ряд приложений в квантовой теории поля, спектральной геометрии, теории чисел, а соответствующий некоммутативный вычет прямо связан со следующей нашей темой – спектральной асимметрией.

Спектральной асимметрией называют зависимость ζ -функции (48) от выбора параметра γ . Основной предмет изучения – те характеристики ζ -функции, которые от этого параметра не зависят либо их зависимость явно вычисляется. Для широкого класса ПДО известно, что функция

$$\zeta_{\gamma'}(s) - \zeta_{\gamma''}(s)$$

регулярна в целых точках, при этом ее значение в нуле всегда нуль. Последнее обстоятельство весьма существенно в теории индекса, к чему мы вернемся в следующем дополнении. Считается, что на регулярность разности двух ζ -функций впервые обратили внимание Атья, Патоди и Зингер в цикле работ 1973–1976 годов, завершеном работой [160], в частности, они детально изучившие в самосопряженном неполуограниченном случае функцию

$$\eta(z) = \sum |\lambda_n|^z \text{sign } \lambda_n, \quad (52)$$

однако отметим, что эти же вопросы ранее рассматривал В. А. Садовничий [48], [163].

Вообще, именно теория ζ -функции, ассоциированной с функцией класса K , фактически положила начало и теории спектральной асимметрии, и это обстоятельство незаслуженно забыто. В работе [11] ζ -функция, ассоциированная с целой функцией класса K , была целой, что стало для специалистов изрядным сюрпризом и некоторое время этот результат сохранял статус “странного”. В указанных работах В. А. Садовничий обнаружил (см. подробнее в настоящем обзоре стр. 106), что ζ -функция, построенная на последовательности части корней функции класса K (18) из одного сектора, является мероморфной

¹²Строго говоря, надо добавить: “в какой-либо карте”, но мы будем пренебрегать угрожающей строгостью, которую легко найти во многих хорошо известных монографиях.

и что исходная целая ζ -функция является линейной комбинацией таких мероморфных. Заметим, что функция (52) как раз имеет структуру линейной комбинации двух обычных ζ -функций. Укажем в этой связи и на работу [54], в которой рассмотрена ζ -функция вида $Z(\sigma) = \sum \lambda_n^{-\sigma} \Lambda(\sigma)$, где

$$\Lambda(\sigma) = \begin{cases} h, & \sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \frac{e^{-2\pi h \sigma i} - 1}{e^{-2\pi \sigma i} - 1} & \text{в других точках.} \end{cases}$$

В заключение укажем, что мы полностью пропускаем обсуждение теории бесконечных определителей и их регуляризации, ограничиваясь ссылкой на одно весьма общее современное исследование – работу [164], и имеющуюся там литературу, и также не обсуждаем широко распространенное в физической литературе использование значений ζ -функций как следа оператора без регуляризации, см., например, [121].

Дополнение 3. Теория индекса линейных операторов

Теория индекса является одной из самых известных задач теории операторов второй половины 20-го века, она многократно и хорошо изложена, и мы ограничимся короткими указаниями на теснейшую и взаимополезную связь теории регуляризованных следов с теорией индекса.

Одна из известных формул для индекса фредгольмова оператора A

$$\text{ind}(A) = \text{Tr } e^{-tA^*A} - \text{Tr } e^{-tAA^*} \quad (53)$$

позволяет исследовать индекс с помощью следов. Естественно, (53) не зависит от t и обладает свойством “топологической инвариантности”: $\text{ind}(A + B) = \text{ind}(A)$ при компактном операторе B . Аналогичные формулы, в которых вместо θ -функций используются ζ -функции, широко исследовались и до появления работы Р. Т. Силя [158], а после этой работы такой метод в отношении ПДО стал главенствующим. Уже упоминавшиеся в предыдущем дополнении работы М. Ф. Атья, В. К. Патоди и И. М. Зингера являются одним из крупнейших примеров исследований такого рода. Многочисленные применения именно такого подхода проведены в серии работ Б. В. Федосова (см. [165], [166] и приведенные там дополнительные ссылки), охватившего в том числе и многие краевые задачи, и в работах Б. В. Федосова и М. А. Шубина о случайных операторах (см. [167]).

Прямо сформулированное приложение теории регуляризованных следов в теории индекса эллиптических операторов дано в монографии Ш. Ремпеля и Б.-В. Шульце [168], в ней для широкого класса ПДО A на многообразиях с краем регуляризованный след введен следующим равенством: $\text{Tr}(A - \text{Op}(\sigma(A)))$, где $\sigma(A)$ – символ оператора A . Доказана важная для корректности определения теорема о независимости регуляризованного следа композиции операторов от порядка сомножителей и далее регуляризованный след использован для формулировки и доказательства ряда формул для индекса операторов.

В работах Ф. Гештези, Б. Саймона и других [169], [170] исследовался регуляризованный индекс Виттена

$$\text{ind}_t(A) = \text{Tr}(e^{-tA^*A} - e^{-tAA^*}), \quad (54)$$

являющийся естественным обобщением (стандартной регуляризацией следа в духе (5)) формулы (53). В качестве инструмента использовалась формула Крейна и было получено представление

$$\operatorname{ind}_t(A) = -t \int_0^\infty e^{-t\lambda} \xi(\lambda) d\lambda,$$

и тогда для самого индекса Виттена, определяемого как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{ind}_t(A) = W(A),$$

были получены следующие две формулы:

$$W(A) = -\xi(0+) \quad (55)$$

и в случае резольвентной сравнимости операторов AA^* и A^*A

$$W(A) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \tau \operatorname{Tr}((A^*A + \tau)^{-1} - (AA^* + \tau)^{-1}).$$

Нетрудно видеть, имея в виду, что для дискретных операторов ф.с.с. есть разность считающих функций спектра, что (55) для дискретных операторов есть в точности дефект регуляризации (22) (конечно, вычисляемый по формуле (22) только в случае применимости метода функций класса K).

Также в [170] была доказана топологическая инвариантность регуляризованного индекса Виттена $\operatorname{ind}_t(A + B) = \operatorname{ind}_t(A)$ для операторов B таких, что для некоторого $\varepsilon < 1/2$ операторы $B(A^*A + 1)^{-\varepsilon}$ и $B^*(AA^* + 1)^{-\varepsilon}$ оба ограничены и для некоторого $\delta > 0$ операторы $B(A^*A + 1)^{-\delta}$ и $B^*(AA^* + 1)^{-\delta}$ оба ядерные. В работе приведены и более точные условия, также отметим, что библиография к этой работе содержит интересные ссылки по приложениям формулы Крейна.

Дополнение 4. О приближенном вычислении первых собственных чисел

В 1957 году И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий предложили (см. [171]) использовать регуляризованные следы для приближенного вычисления собственных чисел операторов. Расположение первых собственных чисел отвечает за устойчивость многих динамических систем, и поэтому актуален любой метод исследования этого вопроса. Сходящиеся ряды из отрицательных степеней собственных чисел использовались ранее для вычисления отдельных слагаемых (см., например, [172]), однако трудность вычисления следов итерированных функций Грина сильно проигрывала простоте и точности выражения через параметры оператора регуляризованных следов, что послужило дополнительным стимулом к постановке данной задачи.

Суть выдвинутой гипотезы в следующем: авторы предположили, что всегда возможно, располагая полной системой регуляризованных следов оператора (в данном случае Штурма–Лиувилля)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^k - A_k(n)) = B(k), \quad k = 1, \dots, \infty, \quad (56)$$

для заданного $\varepsilon > 0$ найти такое N , что система

$$\sum_{n=1}^N (\mu_n^k - A_k(n)) = B(k), \quad k = 1, \dots, N \quad (57)$$

определяет несколько первых собственных чисел с точностью ε . В работе [171] эта идея была без обоснования реализована для первых трех собственных чисел оператора Матье и было получено вполне удовлетворительное совпадение найденных величин с табличными, однако ни тогда, ни позже обосновать этот метод не удалось. Более того, в 1996 году С. А. Шкарин [173] доказал, что системы уравнений, подобные (56), имеют бесконечно много решений, и в частности, в них можно заранее задавать любое конечное множество μ_n -х, и найдется соответствующее решение всей системы¹³. Подобное обстоятельство делает рассмотрение систем типа (57) в общем случае просто бессмысленным. Тем не менее были найдены другие подходы к этой задаче. В. А. Садовничай и В. Е. Подольский [175] ввели специальный класс S операторов Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

с $q(x) \in L_2[0, \pi]$, $h, H \in \mathbb{R}$, характеризуемый через свойства $\varphi(x, \lambda)$ – решения задачи Коши с начальными данными $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Если $q(x) \in C^n[0, \pi]$, то хорошо известно, что $\varphi(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \dots + k_{2i}(x) \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{(\sqrt{\lambda})^{2i}} + k_{2i+1}(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{(\sqrt{\lambda})^{2i}} + \dots + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \pi}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2}}}\right),$$

где $k_i(x)$ рекуррентно определяются потенциалом и параметром h . Класс S характеризуется тем, что в этом разложении для некоторого целого j , $1 \leq j \leq n+1$, коэффициент $k_j(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$. Оказывается, потенциал $q(x)$ любого оператора класса S аналитически продолжается во всю плоскость как мероморфная функция с полюсами второго порядка, ядро оператора преобразования $K(x, t)$ для операторов класса S есть полином по второй переменной, переходная функция обратной задачи $\Phi(x)$ есть обязательно квазиполином и, более того, любой полином по четным степеням x является переходной функцией обратной задачи для некоторого оператора класса S . В этой работе было доказано, что система (56) однозначно определяет спектр оператора класса S и, более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $N(\varepsilon)$, а также существует такое натуральное K , зависящее только от оператора L (и не зависящее от ε), что если использовать в $A_n(k)$ при $k = 1, \dots, K$ первые $N(\varepsilon)$ членов асимптотического разложения λ_n по степеням n , то будут верны неравенства

$$\left| \sum_{n=1}^K (\lambda_n^k - A_n(k)) - B(k) \right| \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, K,$$

¹³Недавно мы повторили и прояснили результат Шкарина в рамках теории функций класса K [174].

причем в работах даны все необходимые конструктивные оценки. И второй важный результат этих работ, распространяющий возможность вычислять собственные числа оператора через следы на “все” операторы Штурма–Лиувилля, состоит в доказательстве того, что для произвольного оператора Штурма–Лиувилля L с потенциалом из $L_2[0, \pi]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует оператор класса S с такой же областью определения, как и у L , и такой, что норма их разности не превосходит ε . Эти результаты были использованы в работе [176].

Вполне естественно, что формулы следов для абстрактных операторов, являющиеся частью теории возмущений спектра операторов, приводят к новым методам приближенного вычисления собственных чисел. Такой метод был предложен В. А. Садовничим и В. В. Дубровским в 1994 году в статье [177]. Суть метода в следующем: в силу формул теории возмущений для собственных чисел μ_n оператора $A + B$ и собственных чисел λ_n оператора A верны равенства (предполагается, что существует система контуров Γ_m , внутри которых количество собственных чисел операторов одинаково):

$$\sum_{n=1}^{n_m} \mu_n^k = \sum_{n=1}^{n_m} \lambda_n^k + \sum_{l=1}^{p_k} \alpha_{lk}(n_m) + \beta_{kp_k}(n_m), \quad (58)$$

где

$$\alpha_{lk}(n_m) = \frac{(-1)^{l+1}k}{2\pi il} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda^{k-1} (BR(A, \lambda))^l d\lambda$$

– l -я поправка теории возмущений для k -й степени оператора для первых n_m собственных чисел, $\beta_{kp_k}(n_m)$ – сумма остальных поправок, ряд из которых заведомо сходится, если p_k -я степень резольвенты оператора будет ядерной. Теперь, если величины $\beta_{kp_k}(n_m)$ окажутся достаточно малы, то система (58) определит μ_n с высокой точностью.

Метод работы [177] удалось применить к некоторым важным задачам математической физики. В [178] этим методом проведено вычисление первых собственных чисел в задаче гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе. Данная задача имеет вид

$$T^2\varphi + U\varphi = R\sigma r T\varphi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \varphi(1) = \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=1} = 0, \quad |\varphi(0)| < \text{const},$$

где

$$T\varphi = \left(r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} - \lambda^2 r \right) \varphi, \quad U\varphi = -i\lambda R r (1 - r^2) T\varphi,$$

σ – спектральный параметр, λ – волновое число, R – число Рейнольдса. Применением метода работы [177] к задаче, получаемой из исходной умножением на T^{-1} , удалось получить систему

$$\sum_{i=1}^4 \sigma_i^k \approx \sum_{i=1}^4 \mu_i^k + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k$$

с точными оценками приближения, где $k = 1, \dots, 4$, α_i – поправки теории возмущений, а μ_i – собственные числа невозмущенной задачи

$$T\varphi = R\mu r \varphi, \quad T^{-1}\varphi(1) = \left. \frac{dT^{-1}\varphi}{dr} \right|_{r=1} = 0.$$

Приведем некоторые численные результаты решения этой системы:

при $R = 1$ $\mu_1 = -2.64 \cdot 10^1$, $\sigma_1 = \mu_1 - 2.79 \cdot 10^{-2}i$, $\mu_2 = -7.09 \cdot 10^1$, $\sigma_2 = \mu_2 - 2.63 \cdot 10^{-2}i$, $\mu_3 = -1.35 \cdot 10^2$, $\sigma_3 = \mu_3 - 2.58 \cdot 10^{-2}i$, $\mu_4 = -2.19 \cdot 10^2$, $\sigma_4 = \mu_4 - 2.55 \cdot 10^{-2}i$;

при $R = 5$ $\mu_1 = -5.28 \cdot 10^0$, $\sigma_1 = \mu_1 - 1.40 \cdot 10^{-1}i$, $\mu_2 = -1.42 \cdot 10^1$, $\sigma_2 = \mu_2 - 1.31 \cdot 10^{-1}i$, $\mu_3 = -2.70 \cdot 10^1$, $\sigma_3 = \mu_3 - 1.29 \cdot 10^{-1}i$, $\mu_4 = -4.38 \cdot 10^1$, $\sigma_4 = \mu_4 - 1.28 \cdot 10^{-1}i$;

при $R = 10$ $\mu_1 = -2.64 \cdot 10^0$, $\sigma_1 = \mu_1 - 2.81 \cdot 10^{-1}i$, $\mu_2 = -7.09 \cdot 10^0$, $\sigma_2 = \mu_2 - 2.59 \cdot 10^{-1}i$, $\mu_3 = -1.35 \cdot 10^1$, $\sigma_3 = \mu_3 - 2.60 \cdot 10^{-1}i$, $\mu_4 = -2.19 \cdot 10^1$, $\sigma_4 = \mu_4 - 2.55 \cdot 10^{-1}i$.

Аналогичные результаты были получены и в задаче Куэтта [179].

Дополнение 5. Некоторые другие результаты

В работе [21] П. Лакс предложил подход к вычислению формул следов, основанный на замене пары операторов (возмущенного и невозмущенного) параметрическим семейством операторов, гладко соединяющим эту пару:

$$L(t)w_n(t) = \lambda_n(t)w_n(t), \quad t \in [0, 1],$$

и исследовании этой задачи с помощью дифференцирования по параметру с использованием соотношения $(\dot{w}_n(t), w_m(t)) + (w_n(t), \dot{w}_m(t)) = 0$. Этот метод П. Лакс применил к целой серии задач для ДО второго порядка, возмущенных оператором умножения на функцию:

$$L(t) = -\Delta + q(x, t), \quad (59)$$

действующих в L_2 на кубе $[0, 2\pi]^k$. Отправляясь от сравнительно несложного равенства

$$\int_0^1 \int_{[0, 2\pi]^k} \dot{q}(x, t)(w_n^2(x, t) - M) dx dt = \lambda_n(1) - \lambda_n(0),$$

в котором при выполнении наложенного автором условия независимости от времени среднего от потенциала, а именно условие

$$\int_{[0, 2\pi]^k} \dot{q}(x, t) dx = 0,$$

константу M можно выбрать произвольно, он пришел к формальному соотношению¹⁴

$$\int_0^1 \int_{[0, 2\pi]^k} \dot{q}(x, t) \left(\sum_n (w_n^2(x, t) - M) \right) dx dt = \sum_n (\lambda_n(1) - \lambda_n(0)). \quad (60)$$

¹⁴Рассуждения этой работы (и на это прямо указывает сам автор) формальны, автор в примерах ограничивается задачами, в которых возможность строгого обоснования в рамках классической теории обобщенных функций очевидна. К сожалению, мы знакомы с попытками использовать формулу (60) без обоснования в значительно более сложных ситуациях. В качестве ограничительного примера приведем формулу следа для оператора Лапласа на сфере (36): нам представляется невозможным получить верный ответ из (60) непосредственно.

Если ряд под интегралом сходится в смысле теории обобщенных функций¹⁵ и сходится¹⁶ ряд справа, то формула (60) становится источником разнообразных формул следа. Ключевым здесь является следующее наблюдение: функция

$$S(x) = \sum_n (w_n^2(x, t) - M)$$

не зависит от t . Таким образом, формула (60) приобретает вид

$$\int_{[0, 2\pi]^k} (q(x, 1) - q(x, 0)) S(x) dx = \sum_n (\lambda_n(1) - \lambda_n(0)), \quad (61)$$

и остается найти более удобный вид для функции $S(x)$ в конкретных задачах. Далее в работе П. Лакс вычислил своим методом ряд хорошо известных формул и несколько новых интересных комбинаций формул следов для ДО с одинаковым дифференциальным выражением, но различными краевыми условиями. Формализм этих действий, на наш взгляд, чересчур велик, и мы не рискуем воспроизводить полученные здесь формулы (хотя и вполне изящные).

В работе [180] для дискретного оператора Штурма–Лиувилля

$$(Lu)_n = a_{n+1}u_{n+1} + b_nu_n + a_nu_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad u_{-1} = 0,$$

действующего в пространстве l_2 , при условиях

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n - a_{n+1}| + |b_n - b_{n+1}|) < \infty$$

получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(a_{n+1}^2 - a_n^2)p_n^2(\lambda) + a_{n+1}(b_{n+1} - b_n)p_n(\lambda)p_{n+1}(\lambda)] = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2\pi\mu'(\lambda)},$$

где $p_n(\lambda)$ – ортогональные по мере $\mu(\lambda)$, $\text{supp } \mu = [-1, 1]$ многочлены, заданные рекуррентным соотношением $\lambda p_n(\lambda) = a_{n+1}p_{n+1}(\lambda) + b_n p_n(\lambda) + a_n p_{n-1}(\lambda)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, $p_{-1}(\lambda) = 0$, $p_0(\lambda) = 1$. В работе [181] получены аналогичные формулы для некоторых классов асимптотически N -периодической якобиевой матрицы. Заканчивая короткий экскурс в приложения теории следов для якобиевых матриц, укажем на недавнюю весьма глубокую работу Р. Киллипа и Б. Саймона [182], в которой формулы типа формул следов содержательно использованы для решения ряда вопросов спектральной теории.

В работе Р. Ш. Бакурадзе и И. В. Станкевича [183] были получены необычные тождества для собственных чисел и собственных функций оператора четвертого порядка

$$y^{(4)} + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0.$$

¹⁵Перемена порядков суммирования и интегрирования может стать самым тонким и трудным местом в обоснованиях.

¹⁶Может быть важен характер сходимости, наличие лишь условной сходимости может оказаться недостаточным.

Для функции

$$\rho_{M,s}(x) = \sum_{k \in M} \lambda_k^s \varphi_k^2(x),$$

где $\varphi_k(x)$ – ортонормированные собственные функции оператора, λ_k – соответствующие собственные числа, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, M – произвольное конечное подмножество натурального ряда, при условии $q(x) \in C^\infty$ были доказаны рекуррентные соотношения

$$\rho_{M,s+2}(x) = R_0 \rho_{M,s}(x) + R_1 \rho_{M,s+1}(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где R_0 и R_1 – линейные интегро-дифференциальные операторы, для которых найдены явные выражения. Заметим, что интегрированием по x из этих равенств можно получить тождества только для собственных чисел. Также в работе есть ссылка на предыдущую (труднодоступную) работу авторов, в которой аналогичная задача решена для оператора второго порядка.

Дополнение 6. Некоторые нерешенные задачи

В этом дополнении мы предлагаем несколько задач, наиболее актуальных, на наш взгляд, на настоящий момент. Конечно, наша точка зрения не бесспорна, задачи выбраны нами с учетом наших собственных научных вкусов, и большая их часть относится к следам дискретных операторов. Мы сознательно не стали давать четкие и строгие постановки, это скорее качественное описание пока еще неразработанных направлений исследований.

1. Формально верная для непрерывных потенциалов формула (9) на самом деле для любого непрерывного потенциала верной не является: как мы знаем, здесь все определяется сходимостью ряда Фурье потенциала. Этот эффект – близкий родственник факта существования неядерного интегрального оператора с непрерывным ядром. Для интегральных операторов найдены различные достаточные условия ядерности и более общие, чем интеграл от диагонали ядра, формулы для следа, см., например, [1]. Было бы интересно найти аналоги для формул следов (для оператора Штурма–Лиувилля значительным продвижением в этом направлении можно считать результаты работ [30], [32], но, например, для оператора Лапласа на сфере вопрос полностью открыт).

2. Представляется важным найти решение давно стоящей задачи о получении формулы первого следа для оператора Лапласа в двумерной области, конкретный “спортивный” интерес давно вызывает наиболее простая задача на квадрате (“простая” только в том смысле, что для данной области точно известна и хорошо изучена в теории чисел последовательность собственных чисел невозмущенного оператора).

3. В качестве невозмущенного рассмотрим оператор, задаваемый дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ с $q(x) > x^{2+\delta}$ для всех больших $|x|$ и некоторым $\delta > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R})$ или в $L_2[0; +\infty)$ с каким-либо условием на границе, а в качестве возмущения – оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $p(x)$. Наложенное условие на потенциал гарантирует не только дискретность спектра, но и ядерность резольвенты оператора, и в этом

случае в силу результатов [17] верна формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - \lambda_n - \int_{\mathbb{R}} p(x) \varphi_n^2(x) dx \right) = 0,$$

где $\varphi_n(x)$ – собственные функции невозмущенного оператора. Эта формула является новым результатом в весьма обширных исследованиях операторов второго порядка на неограниченных интервалах, так как вообще не было формул следов с неубывающими возмущающими потенциалами. Нам представляется интересным вопрос о дальнейшей расшифровке стоящего в ней интеграла (хотя эта задача частично выходит за рамки спектральной теории).

4. Практически не изучен оператор второго порядка на полуоси или всей оси с неограниченным снизу потенциалом. Представляется важным получение формул следов в этом случае.

5. При всем богатстве уже полученных формул следов для самых разных ДО до сих пор остается неясным ответ в случае возмущения одномерного гармонического осциллятора оператором умножения на ограниченную, но не стремящуюся к конечному пределу функцию. Ясно, пожалуй, только то, что этот ответ различен для случаев (почти) периодического возмущения и возмущения, далекого от свойств периодичности в любом, даже самом слабом смысле.

6. Укажем на интересную задачу для оператора в многомерной неограниченной области, задаваемого дифференциальным выражением гармонического осциллятора и возмущенного хотя бы финитным потенциалом. Как входят в ответ характеристики области и какие это характеристики?

7. Касаясь ДО на компактных многообразиях, укажем на задачу для оператора Лапласа–Бельтрами (или Лапласа–Бохнера) на многообразиях более чем с одной ручкой. Как количество ручек входит в ответ? Эта задача тесно примыкает к предмету спектральной геометрии, и подчеркнем, что, к сожалению, нельзя облегчить себе жизнь рассмотрением степени оператора, ведь в силу известных абстрактных теорем при ядерности резольвенты оператора эта характеристика уйдет из ответа (в следы более высоких порядков, что в данном контексте равносильно понижению степени оператора). Эта задача не подразумевает возмущения оператором умножения на функцию (хотя, разумеется, такая постановка тоже интересна), здесь имеется в виду регуляризация с помощью собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на “более простом” многообразии.

8. Представляется важным получить результаты по теории следов трехдиагональных и, более общо, $(2n + 1)$ -диагональных матриц. Пока еще мало изучены следы случайных операторов, причем здесь важна соответствующая трактовка получаемых ответов. В спектральной геометрии в основном используются нерегуляризованные следы – значения ζ -функций либо коэффициенты асимптотики θ -функций, в то время как в других приложениях правильно подобранная регуляризация снимает некоторые “наносные” характеристики, выделяя существенное (например, формулы следов в рамках метода обратной задачи). Полученные результаты теории следов в статистической физике, на наш взгляд, пока обрывочны и фрагментарны, а представляется совершенно ясным, что следы, как некие средние, должны играть в таких теориях фундаментальную роль.

Список литературы

- [1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [2] В. Б. Лидский, “Несамосопряженные операторы, имеющие след”, *Докл. АН СССР*, **125**:3 (1959), 485–487.
- [3] И. М. Лифшиц, “Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой”, *УМН*, **7**:1 (1952), 171–180.
- [4] М. Г. Крейн, “О формуле следов в теории возмущений”, *Матем. сб.*, **33(75)**:3 (1953), 597–626.
- [5] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, Изд-во С.-Петербургского ун-та, СПб., 1994.
- [6] М. Ш. Бирман, Д. Р. Яфаев, “Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие”, *Алгебра и анализ*, **4**:5 (1992), 1–44.
- [7] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, “Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **88**:4 (1953), 593–596.
- [8] Л. А. Дикий, “Об одной формуле Гельфанда–Левитана”, *УМН*, **8**:2 (1953), 119–123.
- [9] R. C. Gilbert, V. A. Kramer, “Trace formulas for powers of a Sturm–Liouville operator”, *Canad. J. Math.*, **16**:4 (1964), 412–422.
- [10] М. Г. Гасымов, “О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов”, *Докл. АН СССР*, **150**:6 (1963), 1202–1205.
- [11] В. Б. Лидский, В. А. Садовнический, “Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций”, *Функц. анализ и его прилож.*, **1**:2 (1967), 52–59.
- [12] Л. Д. Фаддеев, “О выражении для следа разности двух сингулярных дифференциальных операторов типа Штурма–Лиувилля”, *Докл. АН СССР*, **115**:5 (1957), 878–881.
- [13] В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, “О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма–Лиувилля”, *Докл. АН СССР*, **132**:1 (1960), 13–16.
- [14] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, “Уравнение Кортевега–де Фриса – вполне интегрируемая гамильтонова система”, *Функц. анализ и его прилож.*, **5**:4 (1971), 18–27.
- [15] В. А. Садовнический, В. В. Дубровский, “Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о ζ -функции операторов”, *Дифференц. уравнения*, **13**:7 (1977), 1264–1271.
- [16] В. А. Садовнический, В. В. Дубровский, “О некоторых соотношениях для собственных чисел дискретных операторов. Формулы следов для дифференциальных операторов в частных производных”, *Дифференц. уравнения*, **13**:11 (1977), 2033–2042.
- [17] В. А. Садовнический, В. Е. Подольский, “Следы операторов с относительно компактным возмущением”, *Матем. сб.*, **193**:2 (2002), 129–152.
- [18] В. А. Садовнический, В. В. Дубровский, “О классической формуле первого регуляризованного следа оператора Лапласа с нечетным потенциалом на сфере”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **19** (1996), 37–72.
- [19] В. Е. Подольский, “Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^{2n} ”, *Матем. заметки*, **56**:1 (1994), 71–77.
- [20] V. E. Podol'skii, “On the summability of regularized sums of eigenvalues of the Laplace–Beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one”, *Russian J. Math. Phys.*, **4**:1 (1996), 123–130.

- [21] P. D. Lax, "Trace formulas for the Schrödinger operator", *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 503–512.
- [22] F. Gesztesy, H. Holden, B. Simon, Z. Zhao, "A trace formula for multidimensional Schrödinger operators", *J. Funct. Anal.*, **141**:2 (1996), 449–465.
- [23] В. А. Любишкин, В. Е. Подольский, "О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов", *Матем. заметки*, **54**:2 (1993), 33–38.
- [24] F. Gesztesy, H. Holden, B. Simon, Z. Zhao, "Trace formulae and inverse spectral theory for Schrödinger operators", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:2 (1993), 250–255.
- [25] А. Б. Венков, "Спектральная теория автоморфных функций, ζ -функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики", *УМН*, **34**:3 (1979), 69–135.
- [26] И. М. Гельфанд, "О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка", *УМН*, **11**:1 (1956), 191–198.
- [27] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [28] В. В. Дубровский, "Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля", *Дифференц. уравнения*, **16**:6 (1980), 1127–1129.
- [29] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, "Собственное значение и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала", *Докл. РАН*, **365**:3 (1999), 295–297.
- [30] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, "Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ -функции", *Докл. РАН*, **376**:4 (2001), 445–448.
- [31] А. М. Савчук, "Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ -потенциалом", *УМН*, **55**:6 (2000), 155–156.
- [32] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, "Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами", *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 427–442.
- [33] Л. А. Дикий, "Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:4 (1955), 187–200.
- [34] Л. А. Дикий, "Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля", *УМН*, **13**:3 (1958), 111–143.
- [35] Б. М. Левитан, "Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля", *УМН*, **19**:1 (1964), 161–165.
- [36] C. J. A. Halberg, Jr., V. A. Kramer, "A generalization of the trace concept", *Duke Math. J.*, **27**:4 (1960), 607–617.
- [37] М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, "О сумме разностей собственных значений двух сингулярных операторов Штурма–Лиувилля", *Докл. АН СССР*, **151**:5 (1963), 1014–1017.
- [38] С. И. Гринберг, "Формула следов для уравнения Шредингера в конечной области", *Матем. заметки*, **1**:4 (1967), 451–460.
- [39] Р. Ф. Шевченко, "Регуляризация следа обыкновенного дифференциального оператора", *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1965, № 6, 28–36.
- [40] А. Г. Костюченко, *О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1966.
- [41] В. А. Садовничий, "О следе разности двух обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков", *Дифференц. уравнения*, **2**:12 (1966), 1611–1624.
- [42] В. А. Садовничий, "О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков", *Матем. сб.*, **72**:2 (1967), 293–317.

- [43] В. А. Садовничий, “О тождествах для собственных значений системы Дирака и некоторых других систем высшего порядка”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1967, № 3, 37–47.
- [44] Э. Абдукадыров, “Вычисление регуляризованного следа для системы Дирака”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1967, № 4, 17–24.
- [45] А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 1, Гостехиздат, М., 1956.
- [46] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [47] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, “Формулы следов в случае уравнения Орра–Зоммерфельда”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 633–648.
- [48] В. А. Садовничий, “Регуляризованные суммы полуцелых степеней оператора Штурма–Лиувилля”, *Матем. заметки*, **14**:2 (1973), 279–290.
- [49] В. А. Садовничий, “О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношения для нулей функций Бесселя”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1971, № 3, 77–86.
- [50] П. Л. Капица, “Вычисление сумм отрицательных четных степеней корней бesselевых функций”, *Докл. АН СССР*, **77**:4 (1951), 561–564.
- [51] Н. Н. Мейман, “О рекуррентных формулах для степенных сумм нулей бesselевых функций”, *Докл. АН СССР*, **108**:2 (1956), 190–193.
- [52] В. А. Садовничий, “О следах с весом и об асимптотике спектральной функции”, *Дифференц. уравнения*, **10**:10 (1974), 1808–1818.
- [53] А. А. Стакун, “О свойствах оператора Шредингера с комплекснозначным потенциалом”, *Дифференц. уравнения*, **32**:3 (1996), 423–425.
- [54] А. С. Печенцов, “Регуляризованные следы дифференциальных операторов: метод Лидского–Садовничего”, *Дифференц. уравнения*, **35**:4 (1999), 490–497.
- [55] А. С. Печенцов, “Следы одного класса сингулярных дифференциальных операторов: метод Лидского–Садовничего”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 35–42.
- [56] Ю. Белаббаси, “Регуляризованные следы многоточечной задачи для обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков”, *Дифференц. уравнения*, **19**:6 (1983), 938–944.
- [57] М. Мартинович, “Дзета-функция и формулы следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением”, *Дифференц. уравнения*, **18**:3 (1982), 537–540.
- [58] З. Каделбург, “Об асимптотике «спектральных функций» двух несамосопряженных краевых задач”, *Матем. заметки*, **30**:5 (1981), 659–667.
- [59] З. Каделбург, “Об асимптотике спектральной функции для обыкновенных дифференциальных операторов, заданных двучленной операцией на отрезке”, *Дифференц. уравнения*, **18**:9 (1982), 1475–1480.
- [60] З. Каделбург, М. Мартинович, “Спектральная функция одного функционально-дифференциального оператора второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **25**:11 (1989), 1882–1888.
- [61] С. И. Митрохин, “О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной положительной весовой функцией”, *Докл. РАН*, **356**:1 (1997), 13–15.
- [62] М. Пикула, “О регуляризованных следах дифференциального оператора типа Штурма–Лиувилля с запаздывающим аргументом”, *Дифференц. уравнения*, **26**:1 (1990), 103–109.
- [63] В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, Ю. Белаббаси, “О нулях целых функций одного класса”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **8** (1982), 211–217.
- [64] В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, “Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа”, *Докл. АН СССР*, **256**:4 (1981), 794–798.

- [65] С. А. Салех, “Регуляризованные следы многоточечных задач”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1985, № 5, 64–66.
- [66] Г. С. Типенко, “Регуляризованные суммы вычетов для одного класса целых функций экспоненциального типа”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1985, № 1, 93–96.
- [67] Ю. В. Матвеев, “Некоторые свойства собственных функций дифференциально-функционального оператора”, *Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн.*, 1984, № 3, 54–59.
- [68] В. С. Буслаев, “Формулы следов для оператора Шрёдингера в трехмерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **143**:5 (1962), 1067–1070.
- [69] В. С. Буслаев, “Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шрёдингера в трехмерном пространстве”, *Спектральная теория и волновые процессы*, Проблемы матем. физики, **1**, № 1, ред. М. Ш. Бирман, Изд-во ЛГУ, Л., 1966, 82–101.
- [70] В. С. Буслаев, “Рассеянные плоские волны, спектральные асимптотики и формулы следа во внешних задачах”, *Докл. АН СССР*, **197**:5 (1971), 999–1002.
- [71] A. Rybkin, “On a trace formula of the Buslaev–Faddeev type for a long-range potential”, *J. Math. Phys.*, **40**:3 (1999), 1334–1343.
- [72] S. M. Belov, A. V. Rybkin, “Higher order trace formulas of the Buslaev–Faddeev-type for the half-line Schrödinger operator with long-range potential”, *J. Math. Phys.*, **44**:7 (2003), 2748–2761.
- [73] Ф. А. Березин, “Формула следов для многочастичного уравнения Шрёдингера”, *Докл. АН СССР*, **157**:5 (1964), 1069–1072.
- [74] В. С. Буслаев, “Формула следа и сингулярности матрицы рассеяния для системы трех одномерных частиц. Третий групповой интеграл”, *ТМФ*, **16**:2 (1973), 247–259.
- [75] С. П. Меркурьев, “Об S -матричной регуляризации формулы следа для системы трех частиц”, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **63** (1976), 95–131.
- [76] E. Beth, G. E. Uhlenbeck, “The quantum theory of the non-ideal gas. II: Behaviour at low temperatures”, *Physica*, **4**:10 (1937), 915–924.
- [77] Д. Р. Яфаев, “О формуле следа в многоканальной модели Фридрихса”, *Краевые задачи математической физики*, т. 10, Тр. МИАН, **147**, ред. О. А. Ладыженская, Наука, Л., 1980, 194–201.
- [78] С. А. Степин, “Спектр резонансов и формула следа в задаче потенциального рассеяния”, *Функц. анализ и его прилож.*, **38**:3 (2004), 79–89.
- [79] А. В. Рыбкин, “Формула следов для резонансов”, *ТМФ*, **56**:3 (1983), 439–447.
- [80] H. Hochstadt, “On the determination of a Hill’s equation from its spectrum”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19**:5 (1965), 353–362.
- [81] И. М. Гельфанд, Л. А. Диккий, “Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега–де Фриза”, *УМН*, **30**:5 (1975), 67–100.
- [82] Б. М. Левитан, “Еще один способ вычисления плотностей интегралов движения для уравнения Кортевега–де Фриза”, *Матем. заметки*, **22**:1 (1977), 129–135.
- [83] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [84] F. Gesztesy, H. Holden, “Trace formulas and conservation laws for nonlinear evolution equations”, *Rev. Math. Phys.*, **6**:1 (1994), 51–95.
- [85] A. Rybkin, “KdV invariants and Herglotz functions”, *Differential Integral Equations*, **14**:4 (2001), 493–512.
- [86] P. Deift, R. Killip, “On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with square summable potentials”, *Comm. Math. Phys.*, **203**:2 (1999), 341–347.
- [87] H. P. McKean, P. van Moerbeke, “The spectrum of Hill’s equation”, *Invent. Math.*, **30**:3 (1975), 217–274.

- [88] H. Flaschka, "On the inverse problem for Hill's operator", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **59**:4 (1975), 293–309.
- [89] S. Kotani, M. Krishna, "Almost periodicity of some random potentials", *J. Funct. Anal.*, **78**:2 (1988), 390–405.
- [90] W. Craig, "The trace formula for Schrödinger operators on the line", *Comm. Math. Phys.*, **126**:2 (1989), 379–407.
- [91] Б. М. Левитан, "Регуляризованные следы и условия гладкой периодичности потенциала уравнения Штурма–Лиувилля", *Сиб. матем. журн.*, **22**:2 (1981), 137–148.
- [92] Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан, "О формулах следов для операторов Штурма–Лиувилля", *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1978, № 1, 40–49.
- [93] В. А. Садовнический, В. А. Любишкин, "Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов", *Функц. анализ и его прилож.*, **20**:3 (1986), 55–65.
- [94] В. В. Дубровский, А. С. Печенцов, "Регуляризованные следы эллиптических операторов высших порядков", *Дифференц. уравнения*, **29**:1 (1993), 50–53.
- [95] В. А. Любишкин, И. Д. Цопанов, "Регуляризованные следы интегро-дифференциальных операторов", *Матем. заметки*, **43**:6 (1988), 786–793.
- [96] В. В. Дубровский, "Формулы регуляризованных следов операторов с компактной резольвентой", *Дифференц. уравнения*, **26**:12 (1990), 2046–2051.
- [97] В. В. Дубровский, "Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях", *Дифференц. уравнения*, **27**:12 (1991), 2164–2166.
- [98] В. В. Дубровский, Е. А. Пузанкова, "Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике или квадрате, в L_p , $1 \leq p \leq 2$ ", *Дифференц. уравнения*, **35**:4 (1999), 552–555.
- [99] В. А. Любишкин, "О формулах следов Гельфанда–Левитана и Крейна", *Матем. сб.*, **182**:12 (1991), 1786–1795.
- [100] В. В. Дубровский, А. И. Седов, "Оценка разности спектральных функций операторов типа Лежандра", *Фундам. и прикл. матем.*, **6**:4 (2000), 1075–1082.
- [101] В. А. Садовнический, В. В. Дубровский, Н. Ю. Соченко, "Регуляризованные следы несамосопряженных дискретных операторов с неядерной резольвентой", *Докл. РАН*, **370**:1 (2000), 24–26.
- [102] А. Г. Баскаков, "Формулы регуляризованных следов для степеней возмущенных спектральных операторов", *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1985, № 8, 68–71.
- [103] С. В. Сидоренко, "О формулах регуляризованных следов", *УМН*, **54**:5 (1999), 173–174.
- [104] M. Dostanić, "Trace formulas of Gel'fand–Levitan type", *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **55(69)** (1994), 51–63.
- [105] В. А. Садовнический, В. Е. Подольский, "Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой", *Дифференц. уравнения*, **35**:4 (1999), 556–564.
- [106] В. А. Садовнический, С. В. Конягин, В. Е. Подольский, "Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным", *Докл. РАН*, **373**:1 (2000), 26–28.
- [107] В. В. Дубровский, А. Н. Типко, З. С. Чекашкина, "Регуляризованные следы унитарных операторов", *УМН*, **56**:6 (2001), 145–146.
- [108] Х. Х. Муртазин, З. Ю. Фазуллин, "О формулах следов для неядерных возмущений", *Докл. РАН*, **368**:4 (1999), 442–444.
- [109] Х. Х. Муртазин, З. Ю. Фазуллин, "Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов", *Матем. сб.*, **196**:12 (2005), 123–156.

- [110] Т. Г. Амангильдин, “Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля”, *Дифференц. уравнения*, **25**:8 (1989), 1439–1441.
- [111] Г. В. Козлов, В. А. Любишкин, “Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1993, № 4, 6–11.
- [112] Г. В. Козлов, В. А. Любишкин, “Регуляризованные следы высших порядков для гармонического осциллятора”, *Дифференц. уравнения*, **29**:1 (1993), 61–63.
- [113] А. И. Козко, А. С. Печенцов, “Спектральная функция и регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков”, *Докл. РАН*, **401**:2 (2005), 160–162.
- [114] В. А. Любишкин, “Регуляризованные следы оператора Штурма–Лиувилля на полуоси в случае неограниченно убывающего потенциала”, *Дифференц. уравнения*, **18**:2 (1982), 345–346.
- [115] В. В. Дубровский, А. И. Седов, “Асимптотика собственных значений сингулярного дифференциального оператора типа Якоби”, *Докл. РАН*, **353**:3 (1997), 295–299.
- [116] В. Е. Подольский, “О восстановлении оператора Штурма–Лиувилля по его весовой ζ -функции”, *Докл. АН СССР*, **313**:3 (1990), 559–562.
- [117] Е. В. Александрова, “Формула следа для уравнений колебаний прямолинейного трубопровода”, *Дифференц. уравнения*, **33**:1 (1997), 12–18.
- [118] В. Б. Лидский, “О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов”, *Тр. ММО*, **11** (1962), 3–35.
- [119] В. Е. Подольский, “Суммирование по Абелю регуляризованных следов”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 42–48.
- [120] Е. М. Сантанжело, “Вычисление энергии Казимира с помощью спектральных функций”, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 98–117.
- [121] E. Elizalde, “Zeta functions: formulas and applications”, *J. Comput. Appl. Math.*, **118**:1–2 (2000), 125–142.
- [122] Е. В. Александрова, О. В. Бочкарева, В. Е. Подольский, “Суммирование регуляризованных следов сингулярного оператора Штурма–Лиувилля”, *Дифференц. уравнения*, **33**:3 (1997), 291–295.
- [123] Е. В. Александрова, *Формула следа гармонического осциллятора с нефинитным возмущением*, Деп. в ВИНТИ РАН 18.01.1997 № 129-B97.
- [124] A. Pushnitski, I. Sorrell, “High energy asymptotics and trace formulas for the perturbed harmonic oscillator”, *Ann. Henri Poincaré*, **7**:2 (2006), 381–396.
- [125] M. Hitrik, I. Polterovich, “Regularized traces and Taylor expansions for the heat semigroup”, *J. London Math. Soc.* (2), **68**:2 (2003), 402–418.
- [126] В. Е. Подольский, “О следе возмущенной операторной полугруппы”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 462–465.
- [127] Н. Харт, *Геометрическое квантование в действии: Приложения гармонического анализа в квантовой статистической механике и квантовой теории поля*, Мир, М., 1985.
- [128] В. В. Дубровский, “О регуляризованных следах дифференциальных операторов в частных производных”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 40–44.
- [129] А. Н. Бобров, В. Е. Подольский, “Сходимость регуляризованных следов степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n ”, *Матем. сб.*, **190**:10 (1999), 3–16.
- [130] А. Н. Бобров, “Регуляризованные следы высших порядков оператора Лапласа с потенциалом на симметрических пространствах ранга 1”, *Дифференц. уравнения*, **33**:6 (1997), 800–804.
- [131] В. А. Садовничий, З. Ю. Фазуллин, “Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере S^2 ”, *Матем. заметки*, **77**:3 (2005), 434–448.

- [132] В. А. Любишкин, “Регуляризованный след двумерного осциллятора”, *Матем. заметки*, **53**:3 (1993), 156–158.
- [133] З. Ю. Фазуллин, Х. Х. Муртазин, “Классическая формула регуляризованного следа многомерного гармонического осциллятора”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **21** (2001), 298–339.
- [134] Х. Х. Муртазин, З. Ю. Фазуллин, “Спектр и формула следов для двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле”, *Докл. РАН*, **390**:6 (2003), 743–745.
- [135] E. Korotyaev, A. Pushnitski, “A trace formula and high-energy spectral asymptotics for the perturbed Landau Hamiltonian”, *J. Funct. Anal.*, **217**:1 (2004), 221–248.
- [136] M. R. Dostanić, “Spectral properties of the operator of Riesz potential type”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:8 (1998), 2291–2297.
- [137] Ю. В. Коган, “Формулы следов для псевдодифференциальных операторов на окружности”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1980, № 6, 7–11.
- [138] В. Е. Подольский, “Регуляризованные следы некоторых псевдодифференциальных операторов на окружности”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, № 6, 11–14.
- [139] А. Н. Бобров, “Спектральные свойства некоторых двумерных краевых задач”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 1, 3–6.
- [140] И. М. Лифшиц, “О вырожденных регулярных возмущениях. I: Дискретный спектр”, *ЖЭТФ*, **17**:11 (1947), 1017–1025.
- [141] И. М. Лифшиц, “О вырожденных регулярных возмущениях. II: Квазинепрерывный и непрерывный спектры”, *ЖЭТФ*, **17**:12 (1947), 1076–1089.
- [142] М. Г. Крейн, “Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов”, *Докл. АН СССР*, **144**:2 (1962), 268–271.
- [143] М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн, “К теории волновых операторов и операторов рассеяния”, *Докл. АН СССР*, **144**:3 (1962), 475–478.
- [144] В. А. Яврян, “О функции спектрального сдвига для операторов Штурма–Лиувилля”, *Докл. АН АрмССР*, **38**:4 (1964), 193–198.
- [145] Л. С. Коплиенко, “О формуле следов для возмущений неядерного типа”, *Сиб. матем. журн.*, **25**:5 (1984), 62–71.
- [146] H. Neidhardt, “Spectral shift function and Hilbert–Schmidt perturbation: extensions of some work of L. S. Koplienko”, *Math. Nachr.*, **138** (1988), 7–25.
- [147] M. Dostanić, “Trace formula for nonnuclear perturbations of selfadjoint operators”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **54(68)** (1993), 71–79.
- [148] А. В. Рыбкин, “Функция спектрального сдвига, характеристическая функция сжатия и обобщенный интеграл”, *Матем. сб.*, **185**:10 (1994), 91–144.
- [149] А. Полторацкий, “Спектральный сдвиг Крейна и возмущения спектров ранга один”, *Алгебра и анализ*, **10**:5 (1998), 143–183.
- [150] А. Б. Пушницкий, “Представление для функции спектрального сдвига в случае знакоопределенных возмущений”, *Алгебра и анализ*, **9**:6 (1997), 197–213.
- [151] А. Б. Пушницкий, “Интегральные оценки для функции спектрального сдвига”, *Алгебра и анализ*, **10**:6 (1998), 198–233.
- [152] E. Korotyaev, A. Pushnitski, “Trace formulae and high energy asymptotics for the Stark operator”, *Comm. Partial Differential Equations*, **28**:3–4 (2003), 817–842.
- [153] W. Müller, “Relative zeta functions, relative determinants and scattering theory”, *Comm. Math. Phys.*, **192**:2 (1998), 309–347.
- [154] F. Gesztesy, B. Simon, “The xi function”, *Acta Math.*, **176**:1 (1996), 49–71.
- [155] A. Rybkin, “Necessary and sufficient conditions for absolute summability of the trace formulas for certain one dimensional Schrödinger operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:1 (2003), 219–229.

- [156] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Об обобщенной функции спектрального сдвига и связи формул следа Крейна и Гельфанда–Левитана”, *Докл. РАН*, **402**:3 (2005), 311–312.
- [157] H. Weyl, “Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 115–139.
- [158] Р. Т. Сили, “Степени эллиптического оператора”, *Математика*, **12**:1 (1968), 96–112.
- [159] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.
- [160] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, “Spectral asymmetry and Riemannian geometry, III”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **79**:1 (1976), 71–99.
- [161] P. B. Gilkey, “The residue of the global η -function at the origin”, *Advin. in Math.*, **40**:3 (1981), 290–307.
- [162] M. Wodzicki, “Noncommutative residue. I: Fundamentals”, *K-theory, arithmetic and geometry* (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., **1289**, Springer, Berlin, 1987, 320–399.
- [163] В. А. Садовничий, “Дзета-функция и собственные числа дифференциальных операторов”, *Дифференц. уравнения*, **10**:7 (1974), 1276–1285.
- [164] G. Illies, “Regularized products and determinants”, *Comm. Math. Phys.*, **220**:1 (2001), 69–94.
- [165] Б. В. Федосов, “Аналитические формулы индекса эллиптических операторов”, *Тр. ММО*, **30** (1974), 159–241.
- [166] Б. В. Федосов, “Об индексе эллиптических семейств на многообразии с краем”, *Докл. АН СССР*, **248**:5 (1979), 1066–1069.
- [167] Б. В. Федосов, М. А. Шубин, “Индекс случайных эллиптических операторов. II”, *Матем. сб.*, **106(148)**:3 (1978), 455–483.
- [168] III. Ремпель, Б.-В. Шульце, *Теория индекса эллиптических краевых задач*, Мир, М., 1986.
- [169] D. Bollé, F. Gesztesy, H. Grosse, W. Schweiger, B. Simon, “Witten index, axial anomaly, and Krein’s spectral shift function in supersymmetric quantum mechanics”, *J. Math. Phys.*, **28**:7 (1987), 1512–1525.
- [170] F. Gesztesy, B. Simon, “Topological invariance of the Witten index”, *J. Funct. Anal.*, **79**:1 (1988), 91–102.
- [171] Л. А. Дикий, “Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля”, *Докл. АН СССР*, **116**:1 (1957), 12–14.
- [172] А. А. Дородницын, “Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка”, *УМН*, **7**:6 (1952), 3–96.
- [173] С. А. Шкарин, “О способе Гельфанда–Дикого вычисления первых собственных значений оператора Штурма–Лиувилля”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, № 1, 39–44.
- [174] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “О неединственности решения системы регуляризованных следов”, *Докл. РАН*, **402**:4 (2005), 455–456.
- [175] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Об одном классе операторов Штурма–Лиувилля и приближенном вычислении первых собственных значений”, *Матем. сб.*, **189**:1 (1998), 133–148.
- [176] В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, Е. М. Малеко, “Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля”, *Докл. РАН*, **369**:1 (1999), 16–18.
- [177] В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, “Замечания об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретного оператора”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **17** (1994), 244–248.

- [178] В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, “Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе”, *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 50–53.
- [179] В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, “Вычисление первых собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами”, *Дифференц. уравнения*, **36**:6 (2000), 742–746.
- [180] P. Nevai, “Orthogonal polynomials, recurrences, Jacobi matrices, and measures”, *Progress in Approximation Theory* (Tampa, FL, 1990), Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer, New York, 1992, 79–104.
- [181] Б. П. Осиленкер, “Аналог формулы следа для дискретных операторов Штурма–Лиувилля с асимптотически N -периодическими коэффициентами”, *Функц. анализ и его прилож.*, **31**:4 (1997), 72–75.
- [182] R. Killip, B. Simon, “Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory”, *Ann. of Math.* (2), **158**:1 (2003), 253–321.
- [183] Р. Ш. Бакурадзе, И. В. Станкевич, “О некоторых тождествах для собственных чисел и собственных функций одного класса дифференциальных операторов четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **26**:9 (1990), 1483–1490.

В. А. Садовничий (V. A. Sadovnichii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23.04.2006

В. Е. Подольский (V. E. Podol'skii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: wpve@yandex.ru