Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, О пересечении канторовых τ -множеств, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:04:35

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ КАНТОРОВЫХ τ -МНОЖЕСТВ

Н. Г. Мошевитин

1. Результаты о пересечении τ -множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ – некоторый отрезок. Множество $F \subset \mathcal{J}$ называется τ -множеством ($\tau > 0$), если оно может быть получено из отрезка $\mathcal{J}$ последовательным выкидыванием счетного (или конечного) набора интервалов $\Delta_\nu \subset \mathcal{J}$, $\nu = 1, 2, \dots$, так, что каждый раз интервал Δ_ν выкидывается из некоторого отрезка $M_\nu \subset \mathcal{J}$, разбивая его таким образом, что

$$M_\nu = N_1 \sqcup \Delta_\nu \sqcup N_2 \quad \text{и} \quad \min\{|N_1|, |N_2|\} \geq \tau |\Delta_\nu|.$$

(Через $|\cdot|$ здесь и в дальнейшем обозначается длина отрезка или интервала.)

Совокупность всех выкидываемых интервалов обозначим $i(F)$, так что $F = \mathcal{J} \setminus \bigcup_{\Delta \in i(F)} \Delta$. τ -множества с $\tau = 1$ использовались Миримановым [1] и Холлом [2]. С произвольным τ эти множества рассматривались Ньюхаузом [3]–[5] и Вильямсом [6]. Холл [2] доказал, что для 1-множества F сумма $F + F$ является отрезком.

Следующие ниже утверждения обобщают и развивают теорему Холла. Напомним еще одно определение. Два множества называются *зацепляющимися*, если одно из них не лежит целиком в связной компоненте дополнения к другому.

ТЕОРЕМА А. Пусть F_1 и F_2 – соответственно τ_1 - и τ_2 -множества и $\tau_1 \tau_2 \geq 1$. Если, кроме того, F_1 и F_2 зацепляются, то $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Теорема А была доказана Ньюхаузом (см. [3]–[5]).

Повторяя рассуждения Холла и Ньюхауза, легко устанавливается следующий чуть более общий факт (см. [7]): если $F_1 = \mathcal{J}_1 \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu^1$, $F_2 = \mathcal{J}_2 \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu^2$ и выполнено $|\mathcal{J}_1| \geq |\mathcal{J}_2| \geq \max_{\nu \in \mathbb{N}} |\Delta_\nu^1|$, то множества $F_1 + F_2$ и $F_1 - F_2$ являются отрезками.

Отметим, что в работе автора [8] и в работах Астелса [7], [9] получены обобщения теоремы Холла–Ньюхауза для сумм $F_1 + \dots + F_r$ τ -множеств $F_1, \dots, F_r$.

В работе Вильямса [6] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА В. 1. Пусть $F_j = \mathcal{J}_j \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu^j$, $j = 1, 2$, – два зацепляющихся τ -множества с $\tau > 1 + \sqrt{2}$. Тогда пересечение $F_1 \cap F_2$ содержит некоторое канторово подмножество $F \subset F_1 \cap F_2$.

2. Для любых $\tau_1, \tau_2 \in (1, 1 + \sqrt{2})$ существуют канторовы τ_j -множества F_j , $j = 1, 2$, такие, что их пересечение $F_1 \cap F_2$ состоит из одной точки.

3. Пусть $F_j = \mathcal{J}_j \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu^j$, $j = 1, 2$, – два τ -множества с $\tau = 1 + \sqrt{2}$. Тогда пересечение $F_1 \cap F_2$ содержит бесконечное количество точек.

4. Существуют два $(1 + \sqrt{2})$ -множества F_1, F_2 такие, что их пересечение $F_1 \cap F_2$ бесконечно, но счетно.

В этой же работе Вильямса имеются и некоторые другие утверждения.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_j = \mathcal{J}_j \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu^j$, $j = 1, 2$, – два зацепляющихся τ -множества с одним и тем же достаточно большим τ . Тогда пересечение $F_1 \cap F_2$ содержит некоторое τ_1 -множество $F \subset F_1 \cap F_2$ с $\tau_1 = \sqrt{\tau}/6 + O(1)$, $\tau \rightarrow \infty$.

Отметим, что в отличие от работы [6] мы не стремились получить точные значения констант в теореме 1, но пытались проследить порядок зависимости величины τ_1 от τ с ростом параметра τ .

2. О доказательстве теоремы 1. Доказательство теоремы 1 содержит довольно громоздкие выкладки. Здесь мы приведем лишь его идею.

Через $U_\delta(A)$ будем обозначать δ -окрестность множества A . Для интервалов $\Delta', \Delta'' \in i(F_1) \cup i(F_2)$ будем писать $\Delta' \parallel \Delta''$, если Δ' и Δ'' принадлежат одному и тому же $i(F_j)$. Если же $\Delta' \in i(F_j)$, $\Delta'' \in i(F_k)$ и $j \neq k$, то будем писать $\Delta' \perp \Delta''$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-00357, 00-15-96109) и фонда INTAS.

Для $\Delta \in i(F_1) \cup i(F_2)$ определим семейство

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\Delta) &= \{\Delta' \in i(F_1) \cup i(F_2) : \exists \Delta^0 = \Delta, \Delta^1, \dots, \Delta^\nu = \Delta' \text{ такие, что} \\ &|\Delta^j| \geq |\Delta^{j+1}|, \Delta^j \cap U_{\sqrt{\tau}|\Delta^{j+1}|}(\Delta^{j+1}) \neq \emptyset, j = 0, 1, \dots, \nu - 1\}, \\ \sigma(\Delta) &= \operatorname{conv} \left[\bigcup_{\Delta' \in \mathcal{G}(\Delta)} \Delta' \right].\end{aligned}$$

Заметим, что если $\tau > 1$, то в каждой цепи интервалов Δ^j из определения совокупности $\mathcal{G}$ вполне $\Delta^j \perp \Delta^{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

Теорема 1 доказывается в два этапа.

На *первом* этапе доказывается, что при условии $\tau \geq 9$ множество $F_1 \cap F_2$ содержит множество $F = \mathcal{S} \setminus \bigcup_k \sigma_k \subset F_1 \cap F_2$ (где $\sigma_k = \sigma(\Delta_{j_k}^{\nu_k})$), которое может быть получено последовательным выкидыванием из отрезка $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ конечного или счетного набора *непересекающихся* интервалов σ_k (выбираем максимальное по длине $\Delta \in i(F_1) \cup i(F_2)$ и выкидываем $\sigma_1 = \sigma(\Delta)$, затем среди всех оставшихся не выкинутых вместе с $\sigma(\Delta)$ интервалов выбираем максимальный по длине Δ' и выкидываем $\sigma_2 = \sigma(\Delta')$ и так далее). То, что при такой процедуре выкидывания σ_k и σ_{k+1} действительно не пересекаются, является основным вспомогательным утверждением, которое надо доказать на первом этапе. Доказательство проводится разбором двух случаев: $\Delta_{j_k}^{\nu_k} \parallel \Delta_{j_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ и $\Delta_{j_k}^{\nu_k} \perp \Delta_{j_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$.

На *втором* этапе доказывается, что при достаточно большом τ F будет τ_1 -множеством. При этом случаи $\Delta_{j_k}^{\nu_k} \parallel \Delta_{j_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ и $\Delta_{j_k}^{\nu_k} \perp \Delta_{j_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ тоже разбираются по-разному.

3. Замечания. То, что некоторое множество $A \subset [0, 1]$ является τ -множеством с некоторым положительным τ , по сути своей есть очень сильное условие. Приведем два примера.

1. N_q , где q есть целое, большее 1, – множество всех чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых последовательность дробных долей $\{\alpha q^l\}$, $l = 1, 2, 3, \dots$, всюду плотна в отрезке $[0, 1]$.

2. K – множество всех чисел отрезка $[0, 1]$, разложения которых в регулярную цепную дробь имеет последовательность неограниченных неполных частных.

K и каждое N_q являются множествами полной меры, но очевидным следствием теоремы А Ньюхауса является то, что в N_q и K нет ни одного τ -подмножества. В [10] дается такое объяснение этого факта: множество $\mathfrak{A} \subset 2^{[0,1]}$ всех τ -множеств из отрезка $[0, 1]$ в экспоненциальном пространстве $\operatorname{exp}([0, 1])$ с метрикой Хаусдорфа является множеством первой категории Бэра, т.е. распадается в счетное объединение нигде не плотных множеств.

(Пользуясь случаем, отметим, что пересечение $\bigcap_{q \geq 2} ([0, 1] \setminus N_q)$ непусто: как показал Шмидт [11], это следует из α -выигрышности каждого $[0, 1] \setminus N_q$; с другой стороны, явные примеры чисел, не являющихся нормальными ни по какому основанию q , построенные в виде специальных *рядов*, имеются у Коробова [12].)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Mirimanoff // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 118–121. [2] M. Jr. Hall // Ann. of Math. (2). 1948. V. 48. P. 966–993. [3] S. Newhouse // Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 14. P. 191–202. [4] S. Newhouse // Topology. 1974. V. 13. P. 9–18. [5] S. Newhouse // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1979. V. 50. P. 101–152. [6] R. F. Williams // Contemp. Math. 1991. V. 117. P. 163–175. [7] S. Astels // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 5. № 15. P. 108–111. [8] Н. Г. Мошевитин // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 6. С. 948–950. [9] S. Astels // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 1. P. 133–170. [10] Н. Г. Мошевитин // УМН. 1999. Т. 54. № 3. С. 169–170. [11] W. M. Schmidt // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 178–199. [12] А. Н. Коробов. Диофантовы приближения. М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1996.