Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Доказательство гипотезы квантового хаоса и обобщенные цепные дроби, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:37:57

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КВАНТОВОГО ХАОСА И ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

В настоящей работе дано доказательство гипотезы квантового хаоса (Г.К.Х.) для широкого класса квантовых систем, содержащего, как частный случай, хорошо известную и популярную модель вращающейся частицы, находящейся под действием δ -толчков (“kicked rotator”), которая во многих работах рассматривалась как один из главных объектов в связи с подтверждением этой гипотезы. Общая постановка Г.К.Х., выдвинутая в [1], состоит в том, что расстояния между соседними уровнями энергии распределены по закону, близкому к закону Пуассона, и до сих пор она не была доказана ни для одной системы. Доказательство Г.К.Х., предложенное здесь (теорема 1), существенно использует результаты о распределении расстояний между соседними дробными частями значений многочлена [2], а оценка остаточного члена (теорема 2) основана на новой теории обобщенных цепных дробей для векторов [3]. Рассмотрим одномерный нелинейный осциллятор, задаваемый функцией Гамильтона $H = H(\phi, I, t) = H_0(I) + H_1(\phi, t)$:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH_0}{dI}, \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial H_1}{\partial \phi}, \quad (1)$$

где I, ϕ – переменные “действие-угол”, t – независимая переменная, а функция $H_1(\phi, t)$ имеет период 2π по ϕ , период $T > 0$ по t и представляется в виде

$$H_1(\phi, t) = F(\phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (2)$$

где $F(\phi)$ – гладкая 2π -периодическая функция, $\delta = \delta(t)$ – дельта-функция, а суммирование распространено на все целые числа k . Здесь же мы предполагаем, что $H_0(I) = \sum_{s=0}^n b_s I^s$ – многочлен степени $n \geq 2$ с коэффициентами $b_s = a_s/\hbar^s$ ($s = 0, \dots, n$), где $\hbar$ – постоянная Планка, а a_s – вещественные числа. В частном случае, когда $n = 2$, а $F(\phi) = \gamma \cos \phi$ (γ – константа), система (1) есть “kicked rotator”. Введем гильбертово пространство L^2 комплексных 2π -периодических функций как пространство состояний квантовой системы и оператор импульса $\hat{I} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Изменение волновой функции $\Psi = \Psi(\phi, t) \in L^2$ описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\phi, t) = \hat{H}(t) \Psi(\phi, t), \quad (3)$$

где оператор $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$, $\hat{H}_0 = \sum_{s=0}^n b_s \hat{I}^s$, а $\hat{H}_1(t)$ есть предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) операторов умножения на функцию $H_1^{(\varepsilon)}$, которая получается из функции H_1 в (2), если δ -функцию заменить на гладкую функцию δ_ε , сосредоточенную на отрезке $[0, \varepsilon]$, интеграл которой равен 1. Обозначим через $\Psi_+(\phi, nT)$ решение уравнения (3) сразу после момента $t = nT$ и введем оператор монодромии $U: \Psi_+(\phi, nT) \rightarrow \Psi_+(\phi, (n+1)T)$.

ЛЕММА 1. *При $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $e_k(\phi) = \exp(ik\phi) \in L^2$. Тогда $Ue_k(\phi) = \lambda_k(\phi)e_k(\phi)$, где $\lambda_k(\phi) = \exp\left(-\frac{i(F(\phi) + T \sum_{s=0}^n a_s k^s)}{\hbar}\right)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $F(\phi) = \text{const}$, то $e_k(\phi)$ – собственные функции оператора U , а $\lambda_k(\phi)$ – их собственные значения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00268 и № 99-01-01063).

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Символ $\{x\}$ есть дробная часть числа x , $\mathbb{T}^n$ — n -мерный тор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следуя [4], величина $\beta_k(\phi) = \left\{ -\frac{\ln \lambda_k(\phi)}{2\pi i} \right\}$ называется k -уровнем квазиэнергии системы (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ k -уровень и $(k+1)$ -уровень квазиэнергии называются соседними.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Смысл определения 2 состоит в том, что обобщенные собственные функции $e_k(\phi)$ и $e_{k+1}(\phi)$ соответствуют квантовым состояниям, между частотами колебаний $\gamma_k = k/(2\pi)$, $\gamma_{k+1} = (k+1)/(2\pi)$ которых нет других частот состояний $e_s(\phi)$ при $s \neq k, k+1$.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что среди чисел $Ta_2/(2\pi\hbar), \dots, Ta_n/(2\pi\hbar)$ хотя бы одно число — иррациональное, $0 < \sigma \leq 1$, N — натуральное число, а $D_N(\phi, \sigma)$ — количество среди чисел $1, \dots, N$ таких чисел k , что $0 \leq \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) < \sigma$. Тогда при любом ϕ существует предельная функция распределения $P(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\phi, \sigma)/N$, которая имеет вид $P(\sigma) = \sigma - \sigma^2/2$ и отличается от функции распределения $P_{\Pi}(\sigma) = 1 - \exp(-\sigma)$ закона Пуассона с плотностью $\exp(-\sigma)$ членами третьего порядка малости относительно σ .

Доказательство теоремы 1 следует из леммы 1, определения 1 и доказанных в [2] теоремы 3 и ее следствия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть α — вещественное число. Введем отображение $A = A(\alpha)$ пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $Ax = x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, где

$$x'_s = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{s+j}{j} x_{s+j} + \binom{n+1}{n-s+1} \alpha,$$

$1 \leq s \leq n$, $\binom{m}{l}$ — число сочетаний из m элементов по l .

Далее в формулировке теоремы 2 мы используем теорию (A, ω) -цепных дробей для векторов $x \in \mathbb{R}^n$ [3]. Эти цепные дроби дают однозначное символическое представление любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в виде $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}]_{A, \omega}$, если (A, ω) -цепная дробь — конечная.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что число $\alpha = Ta_n/(2\pi(n+1)\hbar)$ — иррациональное, $A = A(\alpha)$, $0 < \sigma \leq 1$, $0 < \rho < 1/2$, N — натуральное число, $n_0 = (116 - 72\rho)/(8 - 16\rho)$, $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ — вектор с координатами $a_s^* = (Ta_{s-1})/(2\pi\hbar s)$ ($s = 1, \dots, n$), $D_N(\phi, \sigma)$ — количество среди чисел $1, \dots, N$ таких чисел k , что $0 \leq \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) < \sigma$. Тогда если $n > n_0$, то существует множество $\Gamma \subset \mathbb{T}^n$ такое, что для почти всех $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ существует вектор $\omega \in \Gamma$ такой, что (A, ω) -цепная дробь вектора a^* — конечная, имеет вид

$$a^* = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}, \quad (4)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ при всех $N \geq 2$

$$|D_N(\phi, \sigma)/N - (\sigma - \sigma^2/2)| \leq c_1\varepsilon + c_2(c_3 + \nu)/(N^\rho\varepsilon), \quad (5)$$

где $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$, $c_3 = c_3(n)$ — константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. V. Berry, M. Tabor // Proc. Roy. Soc. London A. 1977. V. 356. P. 375–394.
 [2] Л. Д. Пустыльников // УМН. 1999. Т. 54. №6. С. 173–174. [3] L. D. Pustyl'nikov // J. Math. Sci. 1999. V. 95. №5. P. 2552–2563. [4] Я. Б. Зельдович // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1492–1495.