Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональные автоморфизмы гиперповерхностей Фано с особенностями, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:34:36

БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ФАНО С ОСОБЕННОСТЯМИ

А. В. Пухликов

1. Цель заметки – установить бирациональную жесткость и вычислить группу бирациональных автоморфизмов общей гиперповерхности Фано индекса 1 $V = V_M \subset \mathbb{P}^M$, $M \geq 5$, имеющих изолированные особенности общего положения. Геометрически бирациональная жесткость означает, что не существует нетривиального рационального отображения $\rho: V \dashrightarrow S$ на многообразии S положительной размерности, слои которого были бы унилинейчаты (т.е. покрывались бы рациональными кривыми). Кроме того, бирациональная жесткость многообразия V влечет единственность минимальной модели в бирациональном классе этого многообразия: любое $\mathbb{Q}$ -Фано многообразие V' , имеющее число Пикара 1, бирационально эквивалентное V , на самом деле бирегулярно изоморфно V . Точное определение бирациональной жесткости и элементарный вывод из него указанных геометрических свойств многообразия см. в [1], [2].

2. Общность гиперповерхности V понимается в следующем смысле. Гиперповерхность $W = W_m \subset \mathbb{P}^N$ степени $m \leq N$ в N -мерном комплексном проективном пространстве *регулярна* в своей гладкой точке $x \in W$, если регулярна последовательность однородных многочленов $q_1, \dots, q_k$, где $k = \min\{m, N-1\}$, $f = q_1 + q_2 + \dots + q_m$ – уравнение гиперповерхности W относительно некоторой системы аффинных координат с центром в точке $x \in W$. Иными словами, система уравнений $q_1 = \dots = q_k = 0$ задает в $\mathbb{P}^N$ алгебраическое подмножество коразмерности k . Подсчет размерностей, аналогичный рассуждениям [1], показывает, что общая (в смысле топологии Зариского на $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$) гиперповерхность W регулярна в каждой своей точке. Пусть теперь $V = V_M \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ – гиперповерхность степени M , имеющая, самое большее, изолированные особые точки, $f = q_1 + q_2 + \dots + q_M$ – ее уравнение относительно системы аффинных координат $(z_1, \dots, z_M)$ с центром в точке $x \in V$. Пусть $\mu = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid q_k \neq 0\} = \text{mult}_x V$ – кратность V в точке x . Предположим, что $M-2 \geq \mu \geq 2$, т.е. $x \in \text{Sing } V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперповерхность V регулярна в точке x , если выполнены следующие условия: (i) последовательность $q_\mu, \dots, q_M$ регулярна в $\mathcal{O}_{x, \mathbb{P}}$; (ii) гиперповерхность $T_x V = \{q_\mu = 0\} \subset \mathbb{T} = \mathbb{P}(T_x \mathbb{P}) \cong \mathbb{P}^{M-1}$ неособа и регулярна в каждой своей точке $y \in T_x V$; (iii) при $\mu = 3, 4$ и $M \geq 7$ для любой точки $y \in T_x V$ ни одна из неприводимых компонент замкнутого множества $\{q_\mu = q_{\mu+1} = \dots = q_6 = 0\} \cap T_y(T_x V) \subset \mathbb{T}$ не содержится в квадратичной гиперповерхности $T_y(T_y(T_x V) \cap T_x V) \subset \mathbb{T}$; при $\mu = 3, M = 6$ достаточно этого условия с q_5 вместо q_6 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{V}_\mu(x) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$ – пространство гиперповерхностей степени $M \geq 5$, имеющих в фиксированной точке $x \in \mathbb{P}$ особенность кратности μ , $2 \leq \mu \leq M-2$. Тогда общая (по Зарискому) гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в каждой своей точке.

3. ТЕОРЕМА. Пусть гиперповерхность V регулярна в каждой точке. (i) Если для любой точки $x \in V$ имеет место оценка $\text{mult}_x V \leq M-3$, то V – бирационально сверхжесткое многообразие. (ii) Если $x \in V$ – (единственная) точка кратности $M-2$, то проекция из этой точки $\pi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^{M-1}$ имеет степень 2 и существует бирациональная инволюция (инволюция Галуа) $\tau \in \text{Bir } V$, переставляющая точки в слоях π . Многообразие V бирационально жесткое и имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{Aut } V \rightarrow \text{Bir } V \rightarrow \langle \tau \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Для общей V имеем $\text{Aut } V = \{1\}$, так что $\text{Bir } V = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-15-96013 и № 99-01-01132) и INTAS (грант INTAS-OPEN 97/2072).

4. Доказательство теоремы проводится методом максимальных особенностей [1]–[3]. Пусть $\Sigma \subset |nH|$ – подвижная линейная система на V , где $H \in \text{Pic } V$ – класс гиперплоского сечения. Дискретное нормирование $\nu \in \mathcal{N}(V)$ называется *максимальной особенностью* системы Σ , если выполнено *неравенство Нетера–Фано* $\nu(\Sigma) > n \cdot \text{discrepancy}(\nu)$. Пусть $B = \text{centre}(\nu) \subset V$ – центр максимальной особенности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $B = x \in V$ – особая точка гиперповерхности V кратности $\mu \geq 3$.

5. Пусть $x \in V$ – регулярная особая точка кратности $\mu \geq 3$, $\nu \in \mathcal{N}(V)$ – максимальная особенность системы $\Sigma \subset |nH|$, $x = \text{centre}(\nu)$, $\varphi_0: V_0 \rightarrow V$ – раздутие особой точки, $E = E_0$ – исключительный дивизор. Имеем $\text{Pic } V_0 = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E$, так что для собственного прообраза линейной системы Σ на V_0 получим $\Sigma^0 \subset |nH - \nu E|$. Напомним, что $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – регулярная гиперповерхность степени $\mu \geq 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (i) При $\mu \leq M - 3$ дивизор E не может быть максимальной особенностью. (ii) При $\mu = M - 2$ бирациональная инволюция $\tau \in \text{Bir } V$ задается линейной системой $|(M - 1)H - ME|$ на V_0 . Если точка x максимальна для системы Σ , т.е. $\nu_0 > n$, то $\nu_0/n \leq M(M - 1)$ и $\tau_*\Sigma$ – подвижная линейная система на V , для которой точка x не максимальна.

Теперь теорема вытекает из следующего ключевого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если точка $x \in V$ не максимальна для линейной системы Σ , то не существует максимальной особенности $\nu \in \mathcal{N}(V)$ такой, что $x = \text{centre}(\nu)$.

Для $\mu = M - 2$ предложение доказывается с помощью теоремы Шокурова о связности [4]. Для $\mu \leq M - 3$ технической основой доказательства является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\nu \in \mathcal{N}(V)$ – максимальная особенность системы Σ , $\text{centre}(\nu) = x$, то существует неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности 2, для которого выполнена оценка

$$\frac{2}{\mu} p_0 \text{mult}_x Y + \sum_{i=1}^L p_i m_i(Y) > \frac{(\sum_{i=0}^K p_i \delta_i)^2}{\frac{1}{2} p_0 + \sum_{i=1}^K p_i} \frac{\deg Y}{M}.$$

Здесь $p_i = p_{K_i}$ – число путей из E_K в E_i в ориентированном графе разрешения ν , $\varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_{i-1}$ раздувает неприводимое подмногообразие $B_{i-1} \subset V_{i-1}$ – центр нормирования ν на V_{i-1} , $E_i \subset V_i$ – исключительный дивизор, $i = 1, \dots, K$, первые L раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности ≥ 3 , $\delta_i = \text{codim } B_{i-1} - 1$, $i = 1, \dots, K$, $\delta_0 = M - \mu - 1$, $m_i(Y)$ есть кратность собственного прообраза подмногообразия Y на V_{i-1} вдоль B_{i-1} (см. подробности в [1]–[3]).

Применяя развитую в [1] технику гиперкасательных линейных систем, можно показать, что факт существования неприводимого цикла Y , описанного в предложении 5, приводит к противоречию. Значит, (произвольная!) линейная система Σ (или ее собственный прообраз относительно инволюции τ) не имеет максимальных особенностей. Но это и есть в точности (сверх)жесткость многообразия V , что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Pukhlikov // Invent. Math. 1998. V. 134. № 2. P. 401–426. [2] A. V. Pukhlikov // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 2000. V. 281. P. 73–100. [3] В. А. Исковских, Ю. И. Манин // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166. [4] J. Kollár (ed.). Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Paris: Soc. Math. France, 1993. (Astérisque. V. 211.)