Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Урусов, Об оптимальном прогнозе момента достижения максимума броуновским движением, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:54:15

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОГНОЗЕ МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

М. А. УРУСОВ

1. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и стандартное броуновское движение $B = (B_t(\omega))_{0 \leq t \leq 1}$ на нем. Пусть $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ — фильтрация, порожденная B и пополненная множествами P -меры 0. Символом $\theta = \theta(\omega)$ обозначим момент, когда B достигнет своего максимального значения: $B_\theta = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t$. Такой момент θ определяется P -п.н. однозначно. $(\mathcal{F}_t)$ -моменты остановки будем обозначать через $\tau, \tilde{\tau}, \tau_*, \dots$. Всюду далее мы рассматриваем в качестве временного интервала отрезок $[0, 1]$, поэтому все рассматриваемые моменты остановки τ предполагаются удовлетворяющими условию $0 \leq \tau \leq 1$.

В данной работе решены следующие задачи.

ЗАДАЧА 1 (байесовская задача). Для произвольного $\lambda > 0$ найти оптимальный момент остановки $\tau_*(\lambda)$, на котором достигается инфимум

$$R(\lambda) = \inf_{\tau} E[(1 - \tau)I_{\{\tau < \theta\}} + \lambda(\tau - \theta)^+]. \quad (1)$$

ЗАДАЧА 2 (условно экстремальная задача). Для произвольного $0 \leq \alpha \leq 1$ найти оптимальный момент остановки $\tau(\alpha)$, на котором достигается инфимум

$$r(\alpha) = \inf_{\tau \in \mathfrak{N}(\alpha)} E(\tau - \theta)^+$$

в классе $\mathfrak{N}(\alpha) = \{\tau : E[(1 - \tau)I_{\{\tau < \theta\}}] \leq \alpha\}$.

2. Для формулировки результатов обозначим через $S = (S_t)_{0 \leq t \leq 1}$ процесс максимума броуновского движения: $S_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. Пусть $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ — соответственно плотность и функция распределения нормальной случайной величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

ТЕОРЕМА 1. В байесовской задаче существует единственный оптимальный момент остановки $\tau_*(\lambda)$, и он дается формулой

$$\tau_*(\lambda) = \inf\{t \geq 0 : S_t - B_t \geq z_*(\lambda)\sqrt{1-t}\}, \quad (2)$$

где $z_*(\lambda)$ — единственный положительный корень уравнения

$$2(\lambda + 1)z[\Phi(z) - 1/2] - [(\lambda + 1)z^2 + 1]\varphi(z) - z = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что функция $z_*(\lambda)$, $\lambda \in (0, +\infty)$, строго убывает, непрерывна, $z_*(\lambda) \xrightarrow{\lambda \downarrow 0} +\infty$, $z_*(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Отсюда и из вида оптимального момента остановки следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 < \lambda_2 &\Rightarrow z_*(\lambda_1) > z_*(\lambda_2) \Rightarrow \tau_*(\lambda_1) > \tau_*(\lambda_2); \\ \lambda \uparrow +\infty &\Rightarrow z_*(\lambda) \downarrow 0 \Rightarrow \tau_*(\lambda) \downarrow 0; \\ \lambda \downarrow 0 &\Rightarrow z_*(\lambda) \uparrow +\infty \Rightarrow \tau_*(\lambda) \uparrow 1. \end{aligned}$$

Это вполне согласуется с интуицией: если λ велико, то штраф за опоздание большой, поэтому надо раньше останавливаться; и все наоборот, если λ мало.

ТЕОРЕМА 2. В условно экстремальной задаче существует единственный оптимальный момент остановки $\tau(\alpha)$, и он дается следующими формулами:

$$\text{для } 0 < \alpha < 1 \quad \tau(\alpha) = \tau_*(\lambda(\alpha)),$$

где $\lambda(\alpha)$ — единственный положительный корень уравнения

$$2 \frac{1 - \Phi(z_*(\lambda))}{1 + (z_*(\lambda))^2} = \alpha;$$

$$\text{для } \alpha = 0 \quad \tau(0) = 1;$$

$$\text{для } \alpha = 1 \quad \tau(1) = 0.$$

3. Сформулированные задачи возникают в финансовой математике. Для анализа финансов естественна следующая постановка: как на основании последовательных наблюдений цен акций на конечном отрезке времени выбрать момент, который в некотором смысле наиболее близок к моменту достижения ценами акций максимального значения. Байесовская задача – частный случай такой постановки, где в качестве цен акций рассматривается броуновское движение и (1) определяет смысл, в котором измеряется близость между τ и θ . Именно, задача состоит в том, чтобы минимизировать среднее значение штрафа, где штраф за раннюю остановку ($\tau < \theta$) составляет $(1 - \tau)I_{\{\tau < \theta\}}$, а за опоздание ($\tau > \theta$) – $\lambda(\tau - \theta)^+$. Условно экстремальная задача – тоже частный случай рассмотренной выше постановки. В ней надо минимизировать штраф за опоздание при условии, что нельзя “слишком рано” останавливаться (штраф за раннюю остановку не должен превосходить α).

Отсюда видно, что было бы интересно найти оптимальный момент остановки, на котором достигается $\inf_{\tau} E|\tau - \theta|$. Эта задача мажорируется байесовской в том смысле, что

$$\inf_{\tau} E|\tau - \theta| \leq R(1).$$

Первый результат в этом направлении установлен в [1], где решена задача

$$\left(\inf_{\tau} E(B_{\theta} - B_{\tau})^2 \quad \left(= \inf_{\tau} E \left(\max_{0 \leq t \leq 1} B_t - B_{\tau} \right)^2 \right) \right).$$

Интересно отметить, что оптимальный момент остановки в ней тоже имеет вид (2).

4. Рассмотрим байесовскую и условно экстремальную задачи для процесса $X_t = f(B_t)$ вместо броуновского движения B_t , где f – детерминированная строго возрастающая функция.

Момент, когда X_t достигает своего максимального значения на отрезке $[0, 1]$, совпадает с θ – соответствующим моментом для B_t . Фильтрации, порожденные X и B , совпадают. Следовательно, τ – момент остановки относительно X , если и только если τ – момент остановки относительно B .

Отсюда ясно, как переформулировать теоремы 1 и 2, чтобы получить решения соответствующих задач.

В частности, это замечание показывает, что установлены аналогичные результаты для процесса e^{B_t} вместо B_t . С финансовой точки зрения они более привлекательны, поскольку процесс e^{B_t} больше похож на цены акций, чем броуновское движение, так как он строго положителен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. E. Graversen, G. Peskir, A. N. Shiryaev // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45. № 1. С. 125–136.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: urusov@mech.math.su

Принято редколлегией
26.12.2001