Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Устинов, Ю. В. Брежнев, О Ψ -функции для конечнозонных потенциалов,
УМН, 2002, том 57, выпуск 1, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:16:14

О Ψ -ФУНКЦИИ ДЛЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Н. В. Устинов, Ю. В. Брежнев

Θ -функциональные формулы для решений спектральных задач и конечнозонных потенциалов оставляют открытым вопрос о явном представлении Ψ -функции в терминах потенциалов. В работе [1] была установлена связь между спектральной задачей

$$\Psi'' - u(x)\Psi = \lambda\Psi \quad (1)$$

и стационарными решениями высших уравнений иерархии КдФ, если спектр оператора (1) имеет конечное число запрещенных зон. Последовавшее затем обобщение понятия конечнозонных потенциалов привело к тому, что под ними стали понимать потенциалы, для которых Ψ -функция является функцией Бейкера–Ахиезера на алгебраической кривой конечного рода. В данном сообщении мы отмечаем, что первоначальная стационарная трактовка естественно приводит к выражениям для Ψ -функции через произвольный конечнозонный потенциал и для алгебраической кривой через первые коэффициенты его полярного разложения.

Для конечнозонного оператора существует коммутирующий операторный пучок [2]. К его построению можно привлечь эволюционное уравнение и наложить стационарную редукцию. Так, разделяя переменные в A -уравнении пары Лакса спектральной задачи (1), имеем:

$$2F(\lambda; u, u', \dots)\Psi' - F'(\lambda; u, u', \dots)\Psi = 2\mu\Psi, \quad (2)$$

μ – параметр разделения переменных. Интегрируя (2), приходим к выражению

$$\Psi(\lambda; x) = \sqrt{F} \exp \int (\mu/F) dx, \quad (3)$$

после подстановки которого в (1) возникает алгебраическое соотношение на параметры μ и λ :

$$4\mu^2 = -2FF'' + F'^2 + 4(u + \lambda)F^2. \quad (4)$$

В случае иерархии КдФ F есть полином по λ с коэффициентами, определяемыми с помощью оператора, сопряженного к рекурсионному. Для F справедливо представление

$$F = \sum_{n=0}^g \sum_{j=0}^{g-n} \lambda^n c_j F_{g-n-j}, \quad c_0 = F_0 = 1, \quad F_1 = -u/2, \quad (5)$$

$$8F_k = \sum_{j=1}^{k-1} (2F_j'' F_{k-j-1} - F_j' F_{k-j-1}' - 4F_j F_{k-j} - 4u F_j F_{k-j-1}) - 4u F_{k-1} \quad (k > 1).$$

Подстановка (5) в (3), (4) доставляет решение спектральной задачи (1) с произвольным конечнозонным потенциалом. Важным является явное присутствие в формуле (3) потенциала и констант c_j в отличие от хорошо известных формул Дубровина [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализ сравнительно недавно обнаруженной статьи Drach'a [4] показывает, что в ней уже имела формула (3), но не содержащая непосредственно потенциала и констант c_j , хотя их наличие автор отчетливо понимал. Более того, в предыдущих работах [5], опираясь на свой *la méthode d'intégration logique*, Drach предъявил структуру решения (3) с полиномиальной по λ функцией F . Удивительно, что из его формул легко извлекаются стационарные уравнения Новикова, их нетривиальные интегралы, явно выписаны уравнения на корни полинома F , первая формула следов и получен ряд других известных сейчас фактов. Основная цель работ [4], [5] – построить *потенциалы, сводящие нахождение решения уравнения (1) к квадратурам*.

Существование парного коммутирующего оператора приводит не только к существованию общей собственной функции двух операторов и алгебраическому соотношению между ними [6]. Поскольку построения, основанные на Ψ -функции как функции Бейкера–Ахиезера и на парном коммутирующем операторе, эквивалентны [2], то конечнозонные потенциалы образуют простейший класс, для которого решается прямая задача – выписывается решение спектральной задачи в квадратурах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00782).

В качестве примера возьмем спектральную задачу

$$\Psi''' - u\Psi' = \lambda\Psi. \quad (6)$$

Пучок, коммутирующий с (6), извлекается, скажем, из пары Лакса уравнения Савады–Котера $u_t = u_{xxxx} - 5uu_{xx} - 5u_xu_{xx} + 5u^2u_x$ после введения стационарной переменной и имеет вид:

$$-3(u' + 3\lambda)\Psi'' + (u'' + u^2 + \alpha)\Psi' + 6\lambda u\Psi = \mu\Psi. \quad (7)$$

Исключая из (6), (7) все производные Ψ , получаем алгебраическую кривую. Предпоследний шаг порождает Ψ -формулу:

$$\Psi(\lambda; x) = \exp \left\{ \int \frac{\mu(2u'' - v) - 3\lambda(27\lambda^2 + 2v'' - 2vu - 7u'^2)}{3(3\lambda + u')u''' - 3(\mu + 6\lambda u)u' - 9\lambda(\mu + 3\lambda u) - (2u'' + v)u'' - 3uu'^2 + v^2} dx \right\}$$

($v = u^2 + \alpha$), из которой можно вывести выражение для произведения $\Psi_1\Psi_2\Psi_3$, являющегося мероморфной функцией на кривой. Хорошей иллюстрацией служит неочевидное решение стационарного уравнения Савады–Котера [7; с. 380]

$$u = 6\wp_1 + 6\wp_2, \quad \wp_1 \equiv \wp(x - \alpha t - \Omega; g_2, g_3), \quad \wp_2 \equiv \wp(x - \alpha t - \tilde{\Omega}; g_2, \tilde{g}_3), \quad \alpha = -12g_2.$$

Его Ψ -функция и спектральные характеристики не могут быть получены в рамках теории эллиптических солитонов. Упомянутое выше произведение будет полиномом по λ : $\Psi_1\Psi_2\Psi_3 = (\lambda^2 + 4\wp_1'\lambda + 4\tilde{g}_3 - 4g_3)(\lambda^2 + 4\wp_2'\lambda - 4\tilde{g}_3 + 4g_3)$, число нулей которого, как и должно, совпадает с родом соответствующей кривой $\mu^3 - 324g_2\lambda^2\mu + 729\lambda((\lambda^2 + 4g_3 + 4\tilde{g}_3)^2 - 64g_3\tilde{g}_3) = 0$.

Другим следствием Ψ -формулы является возможность выразить алгебраические кривые через коэффициенты разложения потенциалов. Так, для спектральной задачи (1) в случае кривых второго рода приходим к естественному завершению одного из результатов работы [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $u(x)$ – 2-зонный потенциал спектральной задачи (1), два возможных разложения которого нормированы так, что $u = 6/x^2 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + \dots$ ($c_1 = 0$, $4c_2 = -35a$) или $u = 2/x^2 + ax^2 + bx^3 + cx^4 - 3c_1bx^5/10 + dx^6 + \dots$ ($4c_2 = -5a$). Тогда соответствующие алгебраические кривые имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \lambda^5 - \frac{35}{2}a\lambda^3 + \frac{63}{2}b\lambda^2 + \frac{27}{8}(21a^2 + 22c)\lambda - \frac{1377}{4}ab + \frac{1287}{2}d, \\ \mu^2 &= \lambda^5 + 2c_1\lambda^4 + \left(c_1^2 - \frac{5}{2}a\right)\lambda^3 - \left(5ac_1 + \frac{7}{2}c\right)\lambda^2 - \left(\frac{5}{2}ac_1^2 + 7cc_1 - \frac{27}{8}a^2 + \frac{81}{4}d\right)\lambda \\ &\quad - \frac{7}{2}cc_1^2 + \frac{27}{8}(a^2 - 6d)c_1 + \frac{81}{64}b^2. \end{aligned}$$

Потенциалы для (6), (7) распадаются на две серии: $u = 6(12)/x^2 + \dots$. Приведем наиболее компактный вариант:

$$\begin{aligned} u &= \frac{12}{x^2} + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \left(\frac{a^2}{36}x^6 + \frac{ab}{22}x^7 + \frac{b^2+ac}{44}x^8 + \frac{5bc}{156}x^9\right) + dx^{10} + \dots \quad (\alpha = -20a), \\ \mu^3 - 36(15a\lambda^2 + 49b^2)\mu + 9\lambda(3^4\lambda^4 + 3024c\lambda^2 - 1568a^3 - 2^621^2c^2 + 2^83^3637d) &= 0. \end{aligned}$$

Авторы благодарят С.П. Царева за обсуждение идей Drach'a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. П. Новиков // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №3. С. 54–66. [2] И. М. Кричевер // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 183–208. [3] Б. А. Дубровин // Функци. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №3. С. 41–51. [4] М. J. Drach // C. R. Acad. Sci. Paris. 1919. V. 168. P. 337–340. [5] M. J. Drach // C. R. Acad. Sci. Paris. 1918. V. 167. P. 743–746; 1919. V. 168. P. 47–50. [6] J. L. Burchnell, T. W. Chaundy // Proc. London Math. Soc. (2). 1922. V. 21. № 1435. P. 420–440. [7] J. Chazy // Acta Math. 1911. V. 34. P. 317–385. [8] Е. Д. Белокозос, В. З. Энольский // Функци. анализ и его прил. 1989. Т. 23. №1. С. 57–58.