Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:02:49

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

М. В. ШАМОЛИН

1. Известно, что в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) невозможно [1]–[3]. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удастся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

2. Рассмотрим системы, вообще говоря, неконсервативного вида

$$\alpha^\bullet = f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad \omega_k^\bullet = f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

заданные на $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^n\{\omega\}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, где функции $f_\lambda(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)$, $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$, таковы:

$$\begin{aligned} f_\alpha(-t_1, -t_2, t_3) &= -f_\alpha(t_1, t_2, t_3), & f_\alpha(t_1, t_2, -t_3) &= f_\alpha(t_1, t_2, t_3), \\ f_k(-t_1, -t_2, t_3) &= -f_k(t_1, t_2, t_3), & f_k(t_1, t_2, -t_3) &= -f_k(t_1, t_2, t_3), \end{aligned}$$

а система (1) соответствует системе $\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}$, $k = 1, \dots, n$, которая заменой $\tau = \sin \alpha$ приводится к $\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_\alpha(\omega, \tau, \varphi_\alpha(\tau))}$, где $\varphi_\lambda(-\tau) = \varphi_\lambda(\tau)$, $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$.

Пусть функции f_λ – полиномы по ω, τ . Рассмотрим случай $n = 1$.

3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $(2n - 1)$ -параметрическое семейство систем уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$

$$\begin{cases} x^\bullet = ax + by + \delta_1 x^{2n-1} + \delta_2 x^{2n-2} y + \dots + \delta_{2n-2} x^2 y^{2n-3} + \delta_{2n-1} x y^{2n-2} \\ y^\bullet = cx + dy + \delta_1 x^{2n-2} y + \delta_2 x^{2n-3} y^2 + \dots + \delta_{2n-2} x y^{2n-2} + \delta_{2n-1} y^{2n-1} \end{cases}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

СЛЕДСТВИЕ 1. Системы следующего вида:

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = a \sin \alpha + b\omega + \delta_1 \sin^{2n-1} \alpha + \delta_2 \omega \sin^{2n-2} \alpha + \dots + \delta_{2n-2} \omega^{2n-3} \sin^2 \alpha \\ \quad + \delta_{2n-1} \omega^{2n-2} \sin \alpha \\ \omega^\bullet = c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \delta_1 \omega \sin^{2n-2} \alpha \cos \alpha + \delta_2 \omega^2 \sin^{2n-3} \alpha \cos \alpha \\ \quad + \dots + \delta_{2n-2} \omega^{2n-2} \sin \alpha \cos \alpha + \delta_{2n-1} \omega^{2n-1} \cos \alpha \end{cases}$$

имеют первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

4. Рассмотрим, далее, случай $n = 2$ и для начала изучим проблему интегрирования более общей системы вида

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{ax + by + cz + c_1 z^2 \frac{1}{x} + c_2 zy \frac{1}{x} + c_3 y^2 \frac{1}{x}}{dx + ey + fz + f_1 z^2 \frac{1}{x} + f_2 zy \frac{1}{x} + f_3 y^2 \frac{1}{x}}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2 \frac{1}{x} + i_2 zy \frac{1}{x} + i_3 y^2 \frac{1}{x}}{dx + ey + fz + f_1 z^2 \frac{1}{x} + f_2 zy \frac{1}{x} + f_3 y^2 \frac{1}{x}}, \end{cases} \quad (2)$$

имеющей особенность типа $\frac{1}{x}$.

Вводя замены $y = ux$, $z = vx$, получим, что система (2) эквивалентна

$$\begin{cases} x \frac{dv}{dx} + v = \frac{ax + bux + cvx + c_1 v^2 x + c_2 vux + c_3 u^2 x}{dx + eux + fvx + f_1 v^2 x + f_2 vux + f_3 u^2 x} \\ x \frac{du}{dx} + u = \frac{gx + hux + ivx + i_1 v^2 x + i_2 vux + i_3 u^2 x}{dx + eux + fvx + f_1 v^2 x + f_2 vux + f_3 u^2 x} \end{cases}.$$

Имеем, вообще говоря, 18-параметрическое семейство уравнений в полных дифференциалах. Если наложить на эти 18 параметров 10 соотношений, то можно сделать вывод о полной интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы, зависящей от 8 параметров:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{\beta_6 x + \beta_7 y + \beta_1 z + \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z^2 \frac{1}{x} + \beta_3 zy \frac{1}{x} + \beta_8 y^2 \frac{1}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\beta_1 y + \beta_2 zy \frac{1}{x} + \beta_3 y^2 \frac{1}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z} \end{cases}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Следующая система третьего порядка на $S^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^2 \{z_1, z_2\}$, зависящая от 8 параметров, обладает полным набором (вообще говоря, трансцендентных – в смысле теории функций комплексного переменного) первых интегралов, выражающихся через элементарные функции:

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = \beta_4 \sin \alpha + \beta_3 z_1 + \beta_3 z_2 \\ z_2^\bullet = \beta_6 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_7 z_1 \cos \alpha + \beta_1 z_2 \cos \alpha + \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \quad + \beta_3 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_8 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ z_1^\bullet = \beta_1 z_1 \cos \alpha + \beta_2 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_3 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}. \quad (3)$$

5. При некоторых значениях параметров системы вида (3) на $S^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^2 \{z_1, z_2\}$ естественным образом возникают в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой [4], [5]. В настоящей работе получено новое семейство интегрируемых случаев, содержащее известные ранее семейства [4], [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
 [2] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. [3] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. [4] М. В. Шамолин // УМН. 1998. Т. 53. №3. С. 209–210.
 [5] М. В. Шамолин // Докл. РАН. 1999. Т. 364. №5. С. 627–629.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
04.01.2002