Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, Е. Д. Нурсултанов, Теория управления “катастрофами”,
УМН, 1998, том 53, выпуск 3, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:41:34

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ “КАТАСТРОФАМИ”

А. Г. Костюченко, Е. Д. Нурсултанов

Пусть $1 < p \leq q < \infty$, Q – либо $\mathbb{R}^n$, либо единичный куб в $\mathbb{R}^n$,

$$(1) \quad Tf(y) = \int_Q T(x, y) f(x) dx$$

– интегральный оператор из $L_p(Q)$ в $L_q(Q)$.

В данной работе на модельной задаче изучается влияние расположения особенностей ядра $T(x, y)$ в $Q \times Q$ на значение нормы $\|T\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ и спектральный радиус $r(T)$ оператора (1). Получены новые оценки нормы интегрального оператора в пространствах Лоренца и Лебега. Используя эти результаты, в пространстве интегральных операторов $\mathcal{L}(L_{pv} \rightarrow L_{qs})$ вводится отношение частичного порядка, позволяющее сравнивать нормы некоторых операторов, не вычисляя их.

1. Модельная задача. Пусть точки $a_k, b_j \in Q \times Q$ удовлетворяют условиям: $|a_k - a_j| \geq \delta$, $k \neq j$, т.е. две точки не должны сближаться больше чем на δ . $\chi_{a_k, \delta}(z)$ – характеристическая функция шара с центром в точке a_k радиуса $\delta/2$ из $\mathbb{R}^{2n}$, $d_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, N$, $0 < \alpha < n$,

$$(2) \quad T_a(x, y) = T_a(z) = \sum_{k=1}^N \frac{d_k \chi_{a_k, \delta}(z)}{|z - a_k|^\alpha}.$$

Интегральный оператор с ядром (2) обозначим через T_a .

3–1. Как надо расположить точки $a_1, a_2, \dots, a_N$ с условием $|a_i - a_j| \geq \delta > 0$ при $i \neq j$, чтобы

- а) норма $\|T_a\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ была максимальной (минимальной)?
- б) спектральный радиус $r(T_a)$ был максимальным (минимальным)?

3–2. Пусть $a_1, \dots, a_{N-1}$ – заданные точки в $Q \times Q$. Как расположить точку a_N , чтобы

- а) норма $\|T_a\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ была максимальной?
- б) спектральный радиус $r(T_a)$ был максимальным?

2. Решение модельной задачи. Пусть $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m$ – точки из Q такие, что $|x_k - x_i|_{\mathbb{R}^n} \geq \delta$ и $|y_k - y_i|_{\mathbb{R}^n} \geq \delta$ при $i \neq k$. Тогда набор точек из $Q \times Q$ вида

$$P = \{(x_k, y_l)\}_{k=1}^r \{l=1}^m$$

назовем прямоугольной решеткой в $Q \times Q$ размерности $r \times m$.

Введем обозначение:

$$V = \sup_{\|f\|_2=1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)\chi_{(0,\delta)}(x,y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. а) Пусть $P = \{(x_k, y_l)\}_{k=1}^r \{l=1}^m$ – произвольная решетка в $Q \times Q$ размерности $r \times m$. Если $a^0 = \{(x_k, y_l)\}_{k=1}^r \{l=1}^m$, то

$$\|T_{a^0}\|_{L_2 \rightarrow L_2} = V \sup_{\|\alpha\|_{l_2}=\|\beta\|_{l_2}=1} \left| \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m d_{kl} \alpha_k \beta_l \right|.$$

б) Пусть a^0 – произвольная решетка в $Q \times Q$ размерности $1 \times N$. Тогда

$$\sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q \times Q} \|T_a\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \|T_{a^0}\|_{L_2 \rightarrow L_2} = V \left(\sum_{k=1}^N d_k^2 \right)^{1/2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $d_1 = \dots = d_N = d$, $[N^{1/2}]$ – целая часть числа $N^{1/2}$, P – прямоугольная решетка размерности $([N^{1/2}] + 1) \times ([N^{1/2}] + 1)$, главная диагональ которой лежит в множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x = y\}$, $P \subset Q \times Q$. Тогда

$$V \cdot [N^{1/2}] \cdot d \leq \sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset P} r(T_a) \leq \sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q \times Q} r(T_a) \leq V \cdot N^{1/2} \cdot d.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. а) Пусть $a^0 = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ из $Q \times Q$ такова, что для $k = 1, 2, \dots, N$ множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x - x_k| \leq \delta\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |y - y_k| \leq \delta\}$ не содержит ни одной точки a_j при $j \neq k$. (Достаточно взять точки на диагонали, т.е. $x_k = y_k$, $k = 1, \dots, N$, $|x_k - x_j| \geq \delta$.) Тогда

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q \times Q} \|T_a\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \|T_{a^0}\| = V \cdot \sup_{1 \leq k \leq N} d_k.$$

б) Пусть точки $a^0 = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ таковы, что для $k = 1, 2, \dots, N$ множество $\{(x, y) \in Q \times Q : |x - y_k| \leq \delta\} \cup \{(x, y) \in Q \times Q : |y - x_k| \leq \delta\}$ не содержит ни одной точки из $\{a_k^0\}_{k=1}^N$. Тогда

$$\inf_{\{a\} \subset Q \times Q} r(T_a) = r(T_{a^0}) = 0,$$

т.е. оператор $T(a)$ – вольтерров.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть последовательность $a_1, \dots, a_{N-1}$ в $Q \times Q$ такова, что существует хотя бы одна решетка из $Q \times Q$, содержащая эти точки $a_1, \dots, a_{N-1}$ в качестве своих узлов. Если P_0 – наименьшая решетка, содержащая точки $a_1, \dots, a_{N-1}$, каждая строка и каждый столбец которой содержат хотя бы по одному узлу, свободному от точек $\{a_k\}_{k=1}^N$, то

$$\sup_{a_N \in Q \times Q} \|T_a\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \sup_{a_N \in P_0} \|T_a\|_{L_2 \rightarrow L_2}.$$

3. Оценка нормы интегрального оператора. Пусть M – семейство всех подмножеств $e \subset Q$ положительной меры $|e| > 0$. Для ядра $T(x, y)$ интегрального оператора (1) определим функцию множеств

$$F_{pq}(\omega, e; T) = \frac{1}{|\omega|^{1/p}} \frac{1}{|e|^{1/q'}} \left| \int_e \int_\omega T(x, y) dy dx \right|, \quad e, \omega \in M.$$

Через $L_{pv}(Q)$ обозначим пространство Лоренца.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 < r, v \leq \infty$, $1/v^+ = \max\{1 - 1/v, 0\}$. Функция $T(x, y)$ такова, что конечно одно из выражений

$$I_1 = \left(\int_0^\infty \sup_{|e| \geq s} \left(\int_0^\infty \left(\sup_{|\omega| \geq t} F_{pq}(\omega, e; T) \right)^{v^+} \frac{dt}{t} \right)^{r/v^+} \frac{ds}{s} \right)^{1/r},$$

$$I_2 = \left(\int_0^\infty \sup_{|\omega| \geq t} \left(\int_0^\infty \left(\sup_{|e| \geq s} F_{pq}(\omega, e; T) \right)^r \frac{ds}{s} \right)^{v^+/r} \frac{dt}{t} \right)^{1/v^+}.$$

Тогда соответствующий интегральный оператор T ограничен из L_{pv} в L_{qr} и

$$\|T\|_{L_{pv} \rightarrow L_{qr}} \leq \min\{I_1, I_2\}.$$

Если же $r = \infty$ либо $v \leq 1$, то соответственно

$$\|T\|_{L_{pv} \rightarrow L_{q\infty}} \sim I_1, \quad \|T\|_{L_{pv} \rightarrow L_{qr}} \sim I_2.$$