Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Фарбер, Д. Шютц, Числа Новикова–Бетти и фундаментальная группа, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:33:31

Числа Новикова–Бетти и фундаментальная группа

М. Фарбер, Д. Шютц

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – конечный, связный клеточный комплекс и $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – нетривиальный класс когомологий. Если первое число Новикова–Бетти $b_1(\xi)$ ненулевое, $b_1(\xi) > 0$, то $\pi_1(X)$ содержит свободную некоммутативную подгруппу.

Этот результат может показаться удивительным, так как числа Новикова–Бетти являются носителями “абелевой” информации о пространстве X . Для определения чисел Новикова–Бетти мы отсылаем читателя к работам [1], [2].

Нижеприведенное доказательство теоремы 1 основывается на результатах Р. Бieri, В. Ноймана, Р. Штребеля [3] и Ж.-К. Сикорава [4].

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – конечный, связный клеточный комплекс с аменабельной фундаментальной группой. Тогда для любого $\xi \neq 0 \in H^1(X; \mathbb{R})$ первое число Новикова–Бетти равно нулю: $b_1(\xi) = 0$.

Этот результат следует из теоремы 1, так как аменабельная группа не содержит свободных неабелевых подгрупп.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – конечный, связный, двумерный клеточный комплекс. Если эйлерова характеристика X отрицательна: $\chi(X) < 0$, то фундаментальная группа $\pi_1(X)$ содержит некоммутативную свободную подгруппу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из отрицательности эйлеровой характеристики $\chi(X) < 0$ следует положительность первого числа Бетти $b_1(X)$ и существование нетривиального класса когомологий $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$. Далее, $\chi(X) = b_2(\xi) - b_1(\xi)$, см. предложение 1.40 в [2], и, значит, $b_1(\xi) > 0$. Следствие 2 теперь вытекает из теоремы 1.

Следствие 2, которое является ответом на известный вопрос Линдона из комбинаторной теории групп, ранее было получено Н.С. Романовским исключительно алгебраическим путем, см. [5]. Наше доказательство является чисто геометрическим и полностью независимым от результатов работы [5]. Следствие 2 можно сформулировать следующим эквивалентным образом.

СЛЕДСТВИЕ 3. Любая дискретная группа G с “дефектом” больше, чем 1, содержит свободную неабелеву подгруппу.

Авторы выражают благодарность Дж. Хилману за указание работы [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим следующую диаграмму колец и их гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \rho \\ S_\xi & \xrightarrow{\beta} & N_\xi \end{array} \quad (1)$$

Здесь $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi]$ – групповое кольцо фундаментальной группы комплекса X , которую мы обозначаем через $\pi = \pi_1(X, x_0)$.

Через N_ξ обозначим кольцо Новикова, которое определяется следующим образом. Рассмотрим класс ξ как групповой гомоморфизм $\xi: \pi \rightarrow \mathbb{Z}$ и обозначим через H факторгруппу $\pi / \text{Ker}(\xi)$. Она является конечно порожденной свободной абелевой группой. Групповое кольцо $\mathbb{Z}[H]$ состоит из конечных сумм вида $\sum a_j h_j$, где $a_j \in \mathbb{Z}$ и $h_j \in H$; оно совпадает с кольцом лорановских полиномов от $\text{rk } H$ переменных. Кольцо Новикова N_ξ является пополнением кольца $\mathbb{Z}[H]$; его элементы представляются как конечные суммы $\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, $h_j \in H$ и последовательность значений $\xi(h_j)$ стремится к $-\infty$. Другими словами, N_ξ состоит из таких рядов Лорана от $\text{rk } H$ переменных, члены которых стремятся к бесконечности по направлению, определяемому классом ξ .

Кольцо S_ξ является пополнением Новикова–Сикорава группового кольца $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi]$; оно первоначально было введено Ж.-К. Сикоравом [4]. Элементами S_ξ являются бесконечные суммы вида $\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, $g_j \in \pi$ и $\xi(g_j) \rightarrow -\infty$.

Диаграмма (1) с очевидными кольцевыми гомоморфизмами коммутативна.

Пусть X – конечный связный полиэдр с фундаментальной группой π . Рассмотрим универсальное накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$. Клеточный цепной комплекс $C_*(\tilde{X})$ является конечно порожденным свободным левым Λ -модулем. Поскольку N_ξ – коммутативное кольцо главных идеалов (см. [2; лемма 1.10]), группа гомологий $H_i(N_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X}))$ является конечно порожденным N_ξ -модулем и ее ранг (над N_ξ) равен числу Новикова–Бетти $b_i(\xi)$, см. [2; § 1.5].

Наша первая цель – показать, что из предположения $b_1(\xi) \neq 0$ следует, что $H_1(S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X})) \neq 0$.

Действительно, заметим, что $H_0(S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X})) = 0$ (так как $\xi \neq 0$ по предположению). Следовательно, используя спектральную последовательность Кюннета, находим, что

$$H_1(N_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X})) = H_1(N_\xi \otimes_{S_\xi} (S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X}))) = N_\xi \otimes_{S_\xi} H_1(S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X})). \quad (2)$$

Следовательно, из $b_1(\xi) \neq 0$ следует нетривиальность $H_1(N_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X}))$, которая вместе с (2) дает нетривиальность $H_1(S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X}))$.

Заметим, что $b_1(\xi) = b_1(-\xi)$ (см. следствие 1.31 в [2]) и поэтому из нетривиальности числа Новикова–Бетти $b_1(\xi)$ следует нетривиальность гомологий Новикова–Сикорава $H_1(S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X}))$ для обоих классов когомологий ξ и $-\xi$.

Р. Биери, В. Нойман и Р. Штребель [3] определили геометрический инвариант дискретных групп, который является подмножеством Σ пространства ненулевых когомологических классов $\Sigma \subset H^1(X; \mathbb{R}) - \{0\}$. Для ненулевого когомологического класса $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ Ж.-К. Сикорав (см. [4; с. 86] или [6]) установил эквивалентность следующих условий: (а) $H_1(S_\xi \otimes_\Lambda C_*(\tilde{X})) = 0$ и (б) $-\xi \in \Sigma$.

Следовательно, как объяснено выше, из $b_1(\xi) \neq 0$ следует, что $\xi \notin \Sigma$ и $-\xi \notin \Sigma$. Теперь мы применим теорему С из [3], утверждающую, что если $\pi_1(X)$ не содержит неабелевых свободных подгрупп, то объединение Σ и $-\Sigma$ равно $H^1(X; \mathbb{R}) - \{0\}$. Так как в нашем случае не выполняется ни одно из условий $\xi \in \Sigma$ и $-\xi \in \Sigma$, заключаем, что $\pi_1(X)$ содержит свободную неабелеву подгруппу. Теорема 1 доказана.

Приведем пример пространства с аменабельной фундаментальной группой и ненулевым числом кручения Новикова $q_1(\xi)$. Другими словами, теорема 1 становится неверной, если заменить предположение $b_1(\xi) \neq 0$ на $q_1(\xi) \neq 0$. Пример 1.49 из [2] описывает двумерный полиэдр с $b_1(\xi) = 0$ и $q_1(\xi) = 1$ для некоторого ненулевого класса $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$. Фундаментальная группа X является группой Баумслэга–Солитера $G = \langle a, b; aba^{-1} = b^2 \rangle$. Она возникает из точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ (см. [2; с. 30]); следовательно, G аменабельна.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **260**:1 (1981), 31–35. [2] M. Farber, *Topology of closed one-forms*, Math. Surveys Monogr., **108**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. [3] R. Bieri, W. D. Neumann, R. Strebel, *Invent. Math.*, **90**:3 (1987), 451–477. [4] J.-Cl. Sikorav, Thèse d'État, Université Paris-Sud, Orsay, 1987. [5] Н. С. Романовский, *Алгебра и логика*, **16**:1 (1977), 88–97. [6] R. Bieri, *Geometric group theory*, v. 1 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **181**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 24–36.

М. Фарбер (M. Farber)
University of Durham
E-mail: Michael.Farber@durham.ac.uk

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
01.08.2006

Д. Шютц (D. Schütz)
University of Durham
E-mail: Dirk.Schuetz@durham.ac.uk