Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Манита, Марковские процессы в непрерывной модели стохастической синхронизации, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 5, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4947>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:50:43

Марковские процессы в непрерывной модели стохастической синхронизации

А. Д. Манита

Мы рассматриваем некоторые классы марковских процессов со значениями в $C[a, b]$ и $D[a, b]$ ($a < b$), которые мотивированы приложениями к стохастическим моделям параллельных и распределенных вычислений. Здесь $C[a, b]$ – нормированное пространство непрерывных функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, а $D[a, b]$ – пространство функций, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке, топология в котором задается метрикой Скорохода [1]. В дальнейшем мы обозначим через $C_{0,m}[a, b]$ подмножество неубывающих функций $f \in C[a, b]$ с условием $f(a) = 0$ и топологией, наследуемой из $C[a, b]$, а через $D_+[a, b]$ – подмножество неотрицательных функций из $D[a, b]$.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы следующие случайные последовательности: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ – простейший (пуассоновский) поток интенсивности γ и $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие равномерно распределение в отрезке $[0, 1]$. Предполагается, что последовательности $\{\tau_i\}$ и $\{\xi_i\}$ независимы между собой. Зафиксируем функцию $v \in C^1[0, 1]$, $v(0) = 0$, $v'(x) > 0$. Рассмотрим случайный процесс $\varkappa(t) = (\varkappa(t, x), x \in [0, 1])$, $t \geq 0$, со значениями в $C_{0,m}[a, b]$, динамика которого по определению имеет две составляющие:

- *Свободное движение*: в интервалах между событиями пуассоновского потока ($\tau_i < t < \tau_{i+1}$) значения $\varkappa(t, x)$ изменяются с постоянной скоростью: $\frac{d}{dt} \varkappa(t, x) = v(x)$;
- *Случайные срезки*: в моменты τ_i производится мгновенное преобразование функции¹: $\varkappa(\tau_i + 0, x) = \varkappa(\tau_i, x) \wedge \varkappa(t, \xi_i)$.

Другими словами, срезка заключается в том, что на участке $x \in (\xi_i, 1]$ профиль функции $\varkappa$ заменяется горизонтальным отрезком. Срезка соответствует синхронизации локальных времен в моделях параллельных вычислений. Всегда будем предполагать, что $\varkappa(0, x) \in C_{0,m}[a, b]$. Очевидно, что $\varkappa(t, 0) = 0$ при всех t и что множество $C_{0,m}[a, b]$ инвариантно относительно описанной динамики.

Легко видеть, что поттраекторно (при каждом фиксированном ω) имеет место представление $\varkappa(t, x) = \int_0^x \theta(t, r) dr$, где вспомогательный случайный процесс $\theta(t) = (\theta(t, x), x \in [0, 1])$ определен следующим образом. В интервалах $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ между событиями пуассоновского потока значения $\theta(t, x)$ растут с постоянной скоростью: $\frac{d}{dt} \theta(t, x) = v'(x)$; в моменты τ_i производится мгновенное преобразование $\theta(\tau_i)$ как

функции от x : $\theta(\tau_i + 0, x) = \theta(\tau_i, x) \cdot \chi(\xi_i - x)$, где $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$ Естественным множеством состояний для $\theta(t)$ является $D_+[0, 1]$.

Зафиксируем $a \in (0, 1)$ и каждой функции $\theta(t) = (\theta(t, x), x \in [0, 1])$ поставим в соответствие ее сужение $\theta_a(t) = (\theta(t, x), x \in [a, 1])$ на отрезок $[a, 1]$. Введем случайный процесс

$$\varkappa_a(t, x) = \int_a^x \theta_a(t, r) dr = \varkappa(t, x) - \varkappa(a, x), \quad x \in [a, 1].$$

В дальнейшем нас будут интересовать свойства одномерных распределений марковских процессов $\varkappa_a(t)$, $\theta_a(t)$ и $\theta(t)$: $\mu_t^{\varkappa,a}(M_1) := P\{\varkappa_a(t) \in M_1\}$, $\mu_t^{\theta,a}(M_2) := P\{\theta_a(t) \in M_2\}$ и $\mu_t^\theta(M_3) := P\{\theta(t) \in M_3\}$, где $M_1 \in \mathcal{B}_{C_{0,m}[a,1]}$, $M_2 \in \mathcal{B}_{D_+[a,1]}$,

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00662 и 05-01-22001).

¹ $x \wedge y := \min(x, y)$, $x \vee y := \max(x, y)$.

$M_3 \in \mathcal{B}_{D_+[0,1]}$, а $\mathcal{B}_S$ – σ -алгебра борелевских множеств над метрическим пространством S . Следующая теорема устанавливает эргодичность марковских процессов $\varkappa_a(t)$ и $\theta_a(t)$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие распределения $\mu_\infty^{\theta,a}$ на $\mathcal{B}_{D_+[a,1]}$ и $\mu_\infty^{\varkappa,a}$ на $\mathcal{B}_{C_{0,m}[a,1]}$, что при $t \rightarrow \infty$ имеют место сходимости по вариации:*

$$\mu_t^{\theta,a} \xrightarrow{\text{T.V.}} \mu_\infty^{\theta,a}, \quad \mu_t^{\varkappa,a} \xrightarrow{\text{T.V.}} \mu_\infty^{\varkappa,a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однородный марковский процесс $\theta_a(t) = (\theta(t, x), x \in [a, 1])$ со значениями в метрическом пространстве $D_+[a, 1]$ удовлетворяет условию Дёблина (см. [2; гл. 5, § 5, гл. 6, § 2]). Действительно, рассмотрим вложенную цепь Маркова $\Theta(n) := \theta(\tau_n) \in D_+[a, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Из любого состояния эта цепь приходит в состояние $0 \in D_+[a, 1]$ с вероятностью a : $\forall \Theta_0 \in D_+[a, 1] \quad \mathbb{P}(\Theta(n) = 0 \mid \Theta(n) = \Theta_0) = a > 0$. Выполнение этого условия влечет геометрическую эргодичность марковской цепи $\Theta(n)$ и марковского процесса $\theta_a(t)$.

Рассмотрим отображение $(J_a g) := \int_a^x g(r) dr$. Оно действует из метрического пространства $D[a, 1]$ в метрическое пространство $C[a, 1]$ и является непрерывным. Очевидно, что $\varkappa_a(t) = J_a \theta_a(t)$. Таким образом, $\mu_t^{\varkappa,a} = \mu_t^{\theta,a} \circ J_a^{-1}$. Поскольку $\|\mu_t^{\theta,a} \circ J_a^{-1} - \mu_\infty^{\theta,a} \circ J_a^{-1}\|_{\text{T.V.}} \leq \|\mu_t^{\theta,a} - \mu_\infty^{\theta,a}\|_{\text{T.V.}}$, мы получаем второе утверждение теоремы с $\mu_\infty^{\varkappa,a} = \mu_\infty^{\theta,a} \circ J_a^{-1}$.

Следующая теорема показывает, что многие свойства предельного распределения величин $\theta(t, x)$ для $x \in (0, 1]$ могут быть получены в явном виде.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $x \in (0, 1]$. Предельное распределение случайной величины $\theta(t, x)$ экспоненциально: $\mathbb{P}_{\mu_\infty^\theta} \{\theta(x) > s\} = \exp(-\frac{\gamma x}{v'(x)} s)$, $s \geq 0$. В частности, $\mathbb{E}_{\mu_\infty^\theta} \theta(x) = \frac{v'(x)}{\gamma x}$, $\mathbb{D}_{\mu_\infty^\theta} \theta(x) = (\frac{v'(x)}{\gamma x})^2$. Ковариация и коэффициент корреляции равны соответственно $\text{Cov}_{\mu_\infty^\theta}(\theta(x_1), \theta(x_2)) = \frac{v'(x_1)v'(x_2)}{\gamma^2(x_1 \vee x_2)^2}$, $\rho_{\mu_\infty^\theta}(\theta(x_1), \theta(x_2)) = \frac{x_1 \wedge x_2}{x_1 \vee x_2}$.*

Несмотря на то что $\varkappa_a(t, 0) \equiv 0$, предел при $t \rightarrow \infty$ распределения процесса $\varkappa(t) = (\varkappa(t, x), x \in [0, 1])$, рассматриваемого как процесс со значениями в $C[0, 1]$, может и не существовать. Как показывает следующая теорема, этот факт связан с поведением функции $v(x)$ в нуле, а достаточное условие существования такого предела чуть сильнее, чем условие $v'(0) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Для существования предела при $t \rightarrow \infty$ семейства распределений $\mu_t^\varkappa$, заданных на $\mathcal{B}_{C_{0,m}[0,1]}$, достаточно выполнения одного из двух эквивалентных условий: для некоторого $\delta > 0$*

$$\int_0^\delta \frac{v(s)}{s^2} ds < \infty \iff \int_0^\delta \frac{v'(s)}{s} ds < \infty.$$

Процесс $\varkappa(t)$ является непрерывной модификацией каскадной модели параллельных вычислений с субординацией [3], а $\varkappa(t, x)$ описывает макроскопическую динамику локального времени в узле x . Как следует из результатов [3], предположение $v'(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, означает, что в настоящей работе мы рассматриваем только одну синхронизованную группу (кластер) вычислительных устройств.

Список литературы

- [1] П. Биллинсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977. [2] Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы*, ИЛ, М., 1956. [3] A. Manita, F. Simonot, *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications*, Third International Symposium (Moscow, 2005), Lect. Notes Comput. Sci., **3777**, eds. O. B. Lupanov et al., 2005, 26–37.

А. Д. Манита (A. D. Manita)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: manita@mech.math.msu.su

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

01.08.2006