Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Андрианов, Дзета-функции ортогональных групп
целочисленных положительно-определенных квадра-
тичных форм, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 6, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:20:22

УДК 511.331+511.38

Дзета-функции ортогональных групп целочисленных положительно-определенных квадратичных форм

А. Н. Андрианов

В обзоре рассмотрены представления колец Гекке–Шимуры произвольных целочисленных положительно-определенных квадратичных форм на пространствах полиномиальных гармонических векторов и исследован вопрос об одновременной диагонализации соответствующих операторов Гекке. Получены точные соотношения между дзета-функциями квадратичных форм от 2 до 4 переменных, отвечающими гармоническим собственным векторам родов 1 и 2, и дзета-функциями Гекке и Андрианова тета-рядов, взвешенных этими векторами соответственно. Аналогичные вопросы для одноклассных квадратичных форм были рассмотрены ранее в работе [1]. Общая ситуация рассматривалась в работе [2].

Библиография: 22 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Об ортогональных дзета-функциях	3
§ 2. Кольца классов автоморфов целочисленных квадратичных форм	6
§ 3. Представления на гармонических векторах	19
§ 4. Действие операторов Гекке на гармонические тета-суммы	24
§ 5. Бинарные формы фундаментальных дискриминантов	35
Список литературы	43

§ 1. Об ортогональных дзета-функциях

Основные объекты и инструменты исследования арифметической теории представлений групп Ли – дзета-функции дискретных подгрупп – естественно возникают при рассмотрении представлений соответствующих алгебр Гекке–Шимуры на подходящих пространствах автоморфных форм (*автоморфные представления*). В самом известном случае дзета-функций модулярных форм рассматриваются представления алгебр Гекке–Шимуры подгрупп целочисленных симплектических групп $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ на пространствах голоморфных модулярных форм, задаваемые операторами Гекке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00930).

Настоящий обзор посвящен систематическому изучению дзета-функций ортогональных групп целочисленных положительно-определенных квадратичных форм, начатому в работе [1] для случая одноклассных форм. В ситуации ортогональных групп алгебры Гекке–Шимуры возникают как кольца классов автоморфов подходящих систем целочисленных квадратичных форм. В простейшем случае одноклассных квадратичных форм, когда, например, род формы состоит из единственного класса относительно целочисленной эквивалентности, это просто кольца классов автоморфов таких форм. (*Целочисленный собственный*) *автоморф* неособой целочисленной квадратичной формы $\mathbf{q}(X)$ от m переменных это, по определению, целочисленная $(m \times m)$ -матрица D с положительным определителем, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{q}(DX) = \mu \mathbf{q}(X) \quad ({}^tX = (x_1, \dots, x_m)), \quad (1.1)$$

где $\mu = \mu(D)$ – *мультипликатор* автоморфа. Все автоморфы образуют полугруппу $\mathbf{A} = A(\mathbf{q})$ – *полугруппу автоморфов формы $\mathbf{q}$* , а автоморфы мультипликатора $\mu = 1$ образуют группу $\mathbf{E} = E(\mathbf{q})$ – *группу (собственных) единиц формы $\mathbf{q}$* . *Кольцо Гекке–Шимуры*, или *кольцо классов автоморфов, формы $\mathbf{q}$ над $\mathbb{Z}$* состоит из всех конечных формальных линейных комбинаций с целочисленными коэффициентами символов $(\mathbf{E}D\mathbf{E}) = \tau(D)$, взаимно однозначно соответствующих двусторонним классам смежности $\mathbf{E}D\mathbf{E}$ полугруппы $\mathbf{A}$ по подгруппе $\mathbf{E}$, называемым ниже *двойными классами*,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}) = \left\{ \tau = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \tau(D_{\alpha}) \text{ (формальные конечные)} \mid a_{\alpha} \in \mathbb{Z}, D_{\alpha} \in \mathbf{A} \right\}, \quad (1.2)$$

где произведение двух двойных классов определяется формулой

$$\tau(D)\tau(D') = \sum_{\mathbf{E}D''\mathbf{E} \subset \mathbf{E}D\mathbf{E}D'\mathbf{E}} c(D, D'; D'') \tau(D'')$$

и $c(D, D'; D'')$ обозначает число пар представителей $D_i \in \mathbf{E} \backslash \mathbf{E}D\mathbf{E}$, $D'_j \in \mathbf{E} \backslash \mathbf{E}D'\mathbf{E}$, удовлетворяющих условию $D_i D'_j \in \mathbf{E}D''$. Если форма $\mathbf{q}$ не является одноклассной, кольцо $\mathcal{H}$ следует заменить более сложной конструкцией *матричного кольца Гекке–Шимуры*, которая будет объяснена в следующем параграфе. В одноклассном случае суммы двойных классов фиксированных мультипликаторов,

$$\tau(\mu) = \sum_{D \in \mathbf{E} \backslash \mathbf{A} / \mathbf{E}, \mu(D) = \mu} \tau(D) \in \mathcal{H}, \quad (1.3)$$

удовлетворяют простым мультипликативным соотношениям

$$\tau(\mu)\tau(\nu) = \tau(\nu)\tau(\mu) = \tau(\mu\nu), \quad (1.4)$$

если μ и ν взаимно просты и μ или ν взаимно просты с определителем формы $\mathbf{q}$. Отсюда следует, что формальный ряд Дирихле с коэффициентами $\tau(1), \tau(2), \dots$, где класс $\tau(1) = \tau(1_m)$ является единичным элементом кольца $\mathcal{H}$, может быть разложен в формальное эйлерово произведение:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tau(\mu)}{\mu^s} \left(\sum_{\nu | (\det \mathbf{q})^{\infty}} \frac{\tau(\nu)}{\nu^s} \right) \prod_{p \nmid \det \mathbf{q}} \sum_{\delta=0}^{\infty} \tau(p^{\delta}) p^{-\delta s}, \quad (1.5)$$

при этом мы рассматриваем символ μ^s просто как формальный квазихарактер мультипликативной полугруппы $\mathbb{N}$ целых положительных чисел, а ν и p пробегает все положительные целые числа, делящие некоторые степени числа $\det \mathbf{q}$, и простые числа, не делящие число $\det \mathbf{q}$, соответственно. В работе [3] в общей ситуации было выдвинуто предположение, что для каждого простого числа p , не делящего определитель $\det \mathbf{q}$, формальный степенной ряд с коэффициентами $\tau(1), \tau(p), \tau(p^2), \dots$ является (формально) рациональной дробью над кольцом $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q})$ со знаменателем степени 2^k и числителем степени самое большее $2^k - 2$, где целое число k определяется из условия, что число m переменных формы $\mathbf{q}$ имеет вид $2k - 1$ или $2k$:

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} \tau(p^\delta) t^\delta = R_p(t)^{-1} S_p(t),$$

где

$$R_p(t) = \tau(1) + \sum_{1 \leq i \leq 2^k} \rho_i t^i,$$

$$S_p(t) = \sum_{0 \leq j \leq 2^k - 2} \sigma_j t^j$$

с $\rho_i = \rho_i(p)$, $\sigma_j = \sigma_j(p) \in \mathcal{H}(\mathbf{q})$. В этом случае мы будем говорить, что формальный степенной ряд над кольцом $\mathcal{H}(\mathbf{q})$ вида

$$Z_p(t, \mathbf{q}) = R_p(t)^{-1} \quad (1.6)$$

является *локальным дзета-рядом формы $\mathbf{q}$* . В [3] было доказано, в частности, что это предположение справедливо для квадратичных форм от $= 2, 3$ и 4 переменных.

Предположим теперь, что задано комплексное представление $\mathcal{H}(\mathbf{q}) \ni \tau \mapsto |\tau$ кольца $\mathcal{H}(\mathbf{q})$ на некотором линейном пространстве и что P – некоторая общая собственная функция, так что $P|\tau = \lambda(\tau)P$ для всех $\tau \in \mathcal{H}(\mathbf{q})$ с собственными числами $\lambda(\tau)$. Как пространства представлений в этом случае могут фигурировать пространства гармонических многочленов, отвечающих рассматриваемой квадратичной форме. Тогда, по аналогии с теорией дзета-функций зигелевых модулярных форм, можно рассмотреть степенной ряд

$$Z_p(t, P) = \left(1 + \sum_{1 \leq i \leq 2^k} \lambda(\rho_i) t^i \right)^{-1}$$

и эйлерово произведение

$$Z^*(s, P) = \prod_{p \nmid \det \mathbf{q}} Z_p(p^{-s}, P), \quad (1.7)$$

которые естественно назвать *локальной* и (*регулярной*) *глобальной ортогональной дзета-функциями формы $\mathbf{q}$* соответственно, *отвечающими собственной функции P* , и поставить вопрос о свойствах этих дзета-функций. В общем случае представление на гармонических формах заменяется представлением

на гармонических векторах. На естественный вопрос о существовании связей между дзета-функциями, отвечающими различным типам дискретных подгрупп, мы получим ниже частичный положительный ответ. Будет показано, что в некоторых случаях ортогональные дзета-функции могут быть явно выражены через спинорные дзета-функции подходящих зигелевых модулярных форм.

В § 2 содержится обзор основных определений и свойств колец классов автоморфов. В § 3 рассматриваются стандартные представления колец классов автоморфов на пространствах гармонических векторов и исследуется вопрос о существовании собственных векторов. В § 4, в частности, получены явные выражения дзета-функций положительно-определенных квадратичных форм от $m = 2$ и 4 переменных, отвечающих собственным векторам, через дзета-функции Гекке, если $m = 2$, и дзета-функции Андрианова модулярных форм рода 2, если $m = 4$, гармонических тета-рядов с этими гармоническими собственными векторами в качестве коэффициентов (теоремы 4.2 и 4.3 соответственно). В § 5 показано, что в случае бинарных квадратичных форм фундаментальных дискриминантов соответствующие глобальные дзета-функции фактически совпадают с дзета-функциями соответствующих квадратичных полей с подходящими характеристиками Гекке.

Вряд ли можно сомневаться, что представленные в настоящем обзоре результаты непростых вычислений являются отражением гораздо более общих связей автоморфных представлений алгебр Гекке–Шимуры ортогональной и симплектической групп над глобальными полями. Формализм преобразований, выражающих образы гармонических тета-рядов под действием операторов Гекке через действие колец классов автоморфов на их гармонические коэффициенты, и стоящие за ним прямые связи между кольцами Гекке–Шимуры симплектических групп и кольцами классов автоморфов ортогональных групп могут представить базовые средства для исследования этих связей (см., например, [4]–[6]). Тем не менее, прямые подходы к ортогональным дзета-функциям, не основанные на сведениях к симплектическому случаю, также представляют значительный интерес.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{C}$ множество положительных целых рациональных чисел, кольцо целых рациональных чисел, поле рациональных чисел и поле комплексных чисел соответственно.

Если $\mathbb{A}$ – некоторое множество, то $\mathbb{A}_n^m$ обозначает множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{A}$. Если $\mathbb{A}$ – кольцо с единичным элементом, то 1_n обозначает единичный элемент кольца $\mathbb{A}_n^n$. Результат транспонирования матрицы M обозначается через tM . Для двух матриц S и N соответствующих размеров мы пишем

$$S[N] = {}^tNSN.$$

§ 2. Кольца классов автоморфов целочисленных квадратичных форм

В этом параграфе мы определим кольца классов автоморфов целочисленных неособых квадратичных форм и рассмотрим основные свойства этих колец. Мы

следует, в основном, схеме, изложенной в работе [7], но заменяем системы представителей из классов целочисленной эквивалентности четных матриц одинакового размера, сигнатуры, делителя, ступени и определителя, рассматривавшиеся в [7], на более естественные системы представителей из классов собственной целочисленной эквивалентности, содержащихся в собственных классах подобия четных матриц.

Сначала мы определим абстрактные кольца, которые можно рассматривать как матричные обобщения колец двойных классов Гекке–Шимуры. Предположим, что заданы мультипликативная группа G , конечное множество ее подгрупп $A_1, \dots, A_h$ и подмножества $\Sigma_{ij} \subset G$ для всех пар индексов $i, j = 1, \dots, h$. Мы будем говорить, что система

$$\mathcal{S} = (A_1, \dots, A_h; \Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \dots, \Sigma_{hh}) \quad (2.1)$$

является *hs-системой*, если выполняются следующие три условия:

- (1) $\Sigma_{ij}\Sigma_{jk} \subset \Sigma_{ik}$ для $i, j, k = 1, \dots, h$;
- (2) $A_i \subset \Sigma_{ii}$ для $i = 1, \dots, h$;
- (3) каждый двойной класс $A_i g A_j$ с $g \in \Sigma_{ij}$ является объединением конечного числа левых классов (смежности) $A_i g'$.

Легко проверить, что, поскольку G группа, каждый двойной класс $A_i g A_j$ с $g \in \Sigma_{ij}$ является также объединением конечного числа правых классов (смежности) $g' A_j$, и разложение двойного класса $A_i g A_j$ в объединение непересекающихся левых классов по модулю A_i (соответственно правых классов по модулю A_j) может быть представлено соответственно в виде

$$A_i g A_j = \begin{cases} \bigcup_{\lambda \in (A_j \cap g^{-1} A_i g) \setminus A_j} A_i g \lambda, \\ \bigcup_{\lambda \in A_i / (A_i \cap g A_j g^{-1})} \lambda g A_j. \end{cases} \quad (2.2)$$

Мы будем говорить, что некоторая *hs-система* (2.1) является *ручной*, если каждый из двойных классов $A_i g A_j$ с $g \in \Sigma_{ij}$ содержит одинаковое число различных правых классов $g' A_j$ и левых классов $A_i g'$. Так как G группа, то, согласно (2.2), это условие означает, что

$$\begin{aligned} [A_i : (A_i \cap g A_j g^{-1})] &= [A_j : (A_j \cap g^{-1} A_i g)] \\ &= [g A_j g^{-1} : (A_i \cap g A_j g^{-1})] \quad (\text{для всех } i, j = 1, \dots, h \text{ и } g \in \Sigma_{ij}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.1. (1) *hs-система (2.1) является ручной в том и только том случае, если каждый двойной класс $A_i g A_j$ с $g \in \Sigma_{ij}$ содержит общую систему представителей из левых классов по модулю A_i и правых классов по модулю A_j .*

(2) *Если все группы $A_1, \dots, A_h$ конечны, то hs-система (2.1) является ручной в том и только том случае, если эти группы имеют равные порядки:*

$$\#(A_1) = \dots = \#(A_h). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) следует из очевидного наблюдения, что каждый левый класс $A_i g \lambda$ с $\lambda \in A_j$ имеет непустое пересечение с каждым

правым классом $\mu g \Lambda_j$ с $\mu \in \Lambda_i$, поскольку элемент $\mu g \lambda$ содержится в обоих классах. Если группы Λ_i и Λ_j конечны, то множество $\Lambda_i g \Lambda_j$ тоже конечно и

$$\#(\Lambda_i g \Lambda_j) = \#(\Lambda_i) \#(\Lambda_i \setminus \Lambda_i g \Lambda_j) = \#(\Lambda_i g \Lambda_j / \Lambda_j) \#(\Lambda_j),$$

так что равенства (2.3) эквивалентны условиям $\#(\Lambda_i) = \#(\Lambda_j)$. Лемма 2.1 доказана.

Для данной hs -системы (2.1) мы обозначим через $\mathcal{L}_{ij} = L(\Lambda_i, \Sigma_{ij})$ свободный $\mathbb{Z}$ -модуль, состоящий из всех конечных формальных линейных комбинаций

$$\tau = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (\Lambda_i g_{\alpha})$$

с целочисленными коэффициентами a_{α} символов $(\Lambda_i g_{\alpha})$ с $g_{\alpha} \in \Sigma_{ij}$, которые взаимно однозначно соответствуют левым классам множества Σ_{ij} по группе Λ_i , и через $\mathcal{D}_{ij}$ обозначим подмодуль модуля $\mathcal{L}_{ij}$, состоящий из всех элементов, инвариантных относительно естественного правого умножения на любой элемент группы Λ_j ,

$$\Lambda_j \ni \lambda: \tau \mapsto \tau \lambda = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (\Lambda_i g_{\alpha} \lambda),$$

т.е.

$$\mathcal{D}_{ij} = \{\tau \in \mathcal{L}_{ij} \mid \tau \lambda = \tau \text{ для всех } \lambda \in \Lambda_j\}.$$

Легко видеть, что в качестве базиса подмодуля $\mathcal{D}_{ij}$ можно взять различные элементы вида

$$\tau(g) = \sum_{g_{\alpha} \in \Lambda_i \setminus \Lambda_i g \Lambda_j} (\Lambda_i g_{\alpha}) \quad (g \in \Sigma_{ij}), \quad (2.5)$$

которые находятся во взаимно однозначном соответствии с различными двойными классами $\Lambda_i g \Lambda_j$, содержащимися в Σ_{ij} . Для данных элементов

$$\tau = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (\Lambda_i g_{\alpha}) \in \mathcal{D}_{ij} \quad \text{и} \quad \tau' = \sum_{\beta} b_{\beta} (\Lambda_j g'_{\beta}) \in \mathcal{D}_{jk},$$

где $i, j, k = 1, \dots, h$, определим произведение $\tau \tau'$, полагая

$$\tau \tau' = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} (\Lambda_i g_{\alpha} g'_{\beta}). \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что это произведение не зависит от выбора представителей g_{α} и g'_{β} в соответствующих левых классах, принадлежит пространству $\mathcal{D}_{ik}$ и определяет билинейное спаривание

$$\mathcal{D}_{ij} \times \mathcal{D}_{jk} \mapsto \mathcal{D}_{ij} \mathcal{D}_{jk} \subset \mathcal{D}_{ik}.$$

Наконец, мы обозначим через

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}\langle S \rangle = D(\Lambda_1, \dots, \Lambda_h; \Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \dots, \Sigma_{hh}) \quad (2.7)$$

$\mathbb{Z}$ -модуль, состоящий из всех $(h \times h)$ -матриц вида

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{h1} & \dots & \tau_{hh} \end{pmatrix},$$

где $\tau_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$, с естественными операциями сложения матриц и умножения матриц на скаляры. Ясно, что в качестве базиса пространства $\mathcal{D}$ можно взять множество матриц вида

$$\tau[(g_{ij})] = \begin{pmatrix} \tau(g_{11}) & \dots & \tau(g_{1h}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau(g_{h1}) & \dots & \tau(g_{hh}) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где $g_{ij} \in \Sigma_{ij}$ и $\tau(g_{ij}) \in \mathcal{D}_{ij}$ обозначают элементы вида (2.5). Если мы теперь определим умножение в $\mathcal{D}$ по обычному правилу умножения матриц,

$$\tau\tau' = (\tau_{ij})(\tau'_{jk}) = \left(\sum_{j=1}^h \tau_{ij}\tau'_{jk} \right),$$

где произведения $\tau_{ij}\tau'_{jk}$ понимаются в смысле формул (2.6), мы, очевидно, получим ассоциативное кольцо, которое будем называть (*матричным*) *кольцом Гекке–Шимуры* (*HS-кольцом*) или *кольцом двойных классов системы* $\mathcal{S} = (A_1, \dots, A_h; \Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \dots, \Sigma_{hh})$ (*над* $\mathbb{Z}$). HS-кольцо $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ называется *ручным*, если система $\mathcal{S}$ ручная. Отметим, что кольцо скаляров $\mathbb{Z}$ в определении колец Гекке–Шимуры может быть заменено на произвольное коммутативное и ассоциативное кольцо $\mathbb{A}$ с единичным элементом, что приводит к кольцам Гекке–Шимуры над $\mathbb{A}$.

Обратимся теперь к представлениям квадратичных форм квадратичными формами. Квадратичная форма

$$\mathbf{q}(X) = \frac{1}{2} {}^t X Q X \quad ({}^t X = (x_1, \dots, x_m)) \quad (2.9)$$

от m переменных с матрицей Q называется *целочисленной*, если ее матрица Q содержится в множестве

$$\mathbb{E}_m = \{Q = (Q_{ij}) \in \mathbb{Z}_m^m \mid Q_{ij} = Q_{ji}, Q_{ii} \in 2\mathbb{Z} \ (i, j = 1, \dots, m)\}$$

четных матриц порядка m . Форма является *неособой*, если $\det \mathbf{q} = \det Q \neq 0$. Говоря о целочисленных квадратичных формах, мы будем, главным образом, использовать эквивалентный язык четных матриц. Читатель может легко перевести соответствующие определения и утверждения на язык квадратичных форм.

Для двух матриц Q и Q' , содержащихся в $\mathbb{E}_m$, мы будем обозначать через

$$R^+(Q, Q') = \{D \in \mathbb{Z}_m^m \mid Q[D] = Q', \det D > 0\} \quad (2.10)$$

множество всех *собственных целочисленных представлений матрицы Q' матрицей Q* . Две неособые матрицы Q и Q' из $\mathbb{E}_m$ называют *собственно подобными* и пишут

$$Q \simeq^+ Q',$$

если $\det Q = \det Q'$ и множество $R^+(Q, \mu Q')$ непусто для некоторого целого положительного числа μ , взаимно простого с $\det Q$. В этом случае любая матрица $D \in R^+(Q, \mu Q')$ называется (*собственным*) *подобием матрицы Q в матрицу Q' с мультипликатором $\mu = \mu(D)$* . Мы будем обозначать через

$$S^+(Q, Q') = \bigcup_{\mu \in \mathbb{N}, \gcd(\mu, \det Q)=1} R^+(Q, \mu Q'), \quad \text{где } \det Q = \det Q', \quad (2.11)$$

множество всех (*собственных*) *подобий матрицы Q в матрицу Q'* .

ЛЕММА 2.2. *Пусть Q и Q' – две неособые матрицы из $\mathbb{E}_m$ с равными определителями. Тогда отображение*

$$S^+(Q, Q') \ni D \mapsto D^* = \mu(D)D^{-1} \quad (2.12)$$

является биекцией множества $S^+(Q, Q')$ на множество $S^+(Q', Q)$; эта биекция не меняет мультипликаторов и удовлетворяет условию $(D^)^* = D$. Кроме того, если $D \in S^+(Q, Q')$ и $D_1 \in S^+(Q', Q'')$, где Q, Q' и Q'' – четные матрицы одинаковых порядков с равными ненулевыми определителями, то $DD_1 \in S^+(Q, Q'')$ и $(DD_1)^* = D_1^*D^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $D \in S^+(Q, Q')$, то матрица $D^* = \mu(D)D^{-1}$, очевидно, удовлетворяет соотношениям ${}^tD^*Q'D^* = \mu(D)Q$ и $D^* = (Q')^{-1}{}^tDQ$. Отсюда следует, что матрица D^* является целочисленной, поскольку целочисленны ее произведения на два взаимно простых числа $\det D = \mu^{m/2}$ и $\det Q' = \det Q$, она содержится в множестве $S^+(Q', Q)$ и имеет тот же мультипликатор, что и матрица D . Остальное очевидно. Лемма 2.2 доказана.

Отношение собственного подобия является, очевидно, рефлексивным и транзитивным. Кроме того, по лемме 2.2 это отношение симметрично. Отсюда следует, что множество всех неособых четных матриц данного порядка является объединением непересекающихся классов *собственного подобия*

$$\langle Q \rangle^+ = \{Q' \in \mathbb{E}_m \mid Q' \simeq^+ Q\}. \quad (2.13)$$

Далее, напомним, что две четные матрицы Q и Q' одинакового порядка m называют *собственно эквивалентными*, $Q \cong^+ Q'$, если

$$Q' = Q[U] \text{ с некоторой матрицей } U \in \Lambda_+^m = SL_m(\mathbb{Z}).$$

Квадратичные формы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ с собственно эквивалентными матрицами называются *собственно эквивалентными*, $\mathbf{q} \cong^+ \mathbf{q}'$. Множество всех матриц Q' (соответственно квадратичных форм $\mathbf{q}'$), собственно эквивалентных данной матрице Q (соответственно форме $\mathbf{q}$), называется (*собственным*) *классом эквивалентности матрицы Q (соответственно формы $\mathbf{q}$)* и обозначается через $\{Q\}^+$ (соответственно $\{\mathbf{q}\}^+$). Таким образом,

$$\{Q\}^+ = \{Q' = Q[U] \mid U \in \Lambda_+^m\}. \quad (2.14)$$

Основные характеристики целочисленной квадратичной формы $\mathbf{q}$ с матрицей Q , такие как *сигнатура* матрицы Q (т.е. число положительных

и отрицательных квадратов при вещественной диагонализации формы $\mathbf{q}$), *определитель* $d = \det Q$, *делитель* ненулевой матрицы Q (т.е. наибольшее целое положительное число δ такое, что матрица $\delta^{-1}Q$ является четной) и *степень* неособой Q (т.е. наименьшее целое положительное число q такое, что матрица qQ^{-1} четна) зависят только от класса эквивалентности (2.14) матрицы Q . Согласно теории приведения целочисленных квадратичных форм (см., например, [8; гл. 9]), множество всех четных матриц фиксированного порядка и фиксированного ненулевого определителя является объединением конечного числа классов целочисленно собственно эквивалентных матриц. В частности, каждый собственный класс подобия неособых четных матриц является конечным объединением (непересекающихся) классов собственной эквивалентности,

$$\langle Q \rangle^+ = \bigcup_{i=1}^{h^+ \langle Q \rangle} \{Q_i\}^+. \quad (2.15)$$

Число $h = h^+ \langle Q \rangle = h^+ \langle \mathbf{q} \rangle$ мы будем называть *числом классов* матрицы Q . Поскольку ниже мы рассматриваем только собственные подобия, эквивалентности, классы и числа классов, то прилагательное “собственный”, так же как и соответствующий индекс “+”, будет, как правило, опускаться после первого упоминания.

Пусть Q – неособая матрица из $\mathbb{E}_m$. Мы фиксируем некоторое множество представителей $Q_1, \dots, Q_h$ из классов, удовлетворяющих разложению (2.15). Для любой такой системы мы определим подгруппы $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h$ группы $G = GL_m(\mathbb{Q})$, беря в качестве $\mathbf{E}_i$ *группу*

$$\mathbf{E}_i = E^+(Q_i) = R^+(Q_i, Q_i) \quad (2.16)$$

(*собственных*) *единиц матрицы* Q_i , и определим подмножества $\mathbf{A}_{ij}$ группы G для $i, j = 1, \dots, h$, полагая $\mathbf{A}_{ij}$ равным *множеству*

$$\mathbf{A}_{ij} = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathbf{A}_{ij}(\mu), \quad \text{где} \quad \mathbf{A}_{ij}(\mu) = R^+(Q_i, \mu Q_j), \quad (2.17)$$

(*собственных*) *автоморфов матрицы* Q_i в Q_j . В отличие от подобий, мультипликатором автоморфа может быть произвольное целое положительное число.

Мы собираемся определить кольцо Гекке–Шимуры (2.7) системы

$$\mathcal{S} \langle Q \rangle = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h; \mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \dots, \mathbf{A}_{hh}),$$

но сначала необходимо проверить, является ли эта система hs -системой. Непосредственно из определений следует, что группы $\Lambda_i = \mathbf{E}_i$ и множества $\Sigma_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$ удовлетворяют условиям (1) и (2) определения hs -систем. Для проверки условия (3) мы докажем следующую простую лемму.

ЛЕММА 2.3. *Для каждой неособой матрицы $D \in \mathbb{Z}_m^m$ пересечение левого класса ΛD по модулю группы $\Lambda = \Lambda_+ = SL_m(\mathbb{Z})$ с множеством $\mathbf{A}_{ij}$ либо пусто, либо состоит из единственного левого класса $\mathbf{E}_i D'$ множества $\mathbf{A}_{ij}$ по модулю $\mathbf{E}_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $D', D'' \in \mathbf{A}_{ij} \cap \Lambda D$, то $Q_i[D'] = \mu' Q_j$, $Q_i[D''] = \mu'' Q_j$ и $D'' = \lambda D'$ с $\lambda \in \Lambda$, откуда

$$Q_i[\lambda] = Q_i[D''(D')^{-1}] = \mu'' Q_j[(D')^{-1}] = \mu''/\mu' Q_i$$

и, таким образом, $\mu'' = \mu'$, $\lambda \in \mathbf{E}_i$ и $D'' \in \mathbf{E}_i D'$. Лемма 2.3 доказана.

Обратимся теперь к условию (3). Пусть $D \in \mathbf{A}_{ij}$, и пусть

$$\mathbf{E}_i D \mathbf{E}_j = \bigcup_{\alpha} \mathbf{E}_i D_{\alpha}$$

– разбиение двойного класса в объединение непересекающихся левых классов. Тогда

$$\bigcup_{\alpha} \mathbf{E}_i D_{\alpha} \subset \Lambda D \Lambda = \bigcup_{\beta} \Lambda D'_{\beta},$$

и по лемме 2.3 каждый левый класс $\Lambda D'_{\beta}$ содержит не более одного левого класса $\mathbf{E}_i D_{\alpha}$. Но объединение справа является конечным (см., например, [9; § 3.2]), так что конечно и объединение слева. Таким образом, мы можем определить кольцо (2.7) двойных классов системы $\mathcal{S}\langle Q \rangle$,

$$\mathcal{H}\langle Q \rangle = \mathcal{H}(Q_1, \dots, Q_h) = D(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h; \mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \dots, \mathbf{A}_{hh}), \quad (2.18)$$

обобщающее кольцо (1.2), которое мы будем называть *кольцом Гекке–Шимур* или *кольцом классов автоморфов матрицы Q (над $\mathbb{Z}$)*. В последующем изложении мы фиксируем матрицу Q и все обозначения, относящиеся к определению кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$, включая некоторую систему $Q_1, \dots, Q_h$ представителей из классов целочисленной эквивалентности, содержащихся в классе подобия (2.15).

Элементы кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$ вида (2.8),

$$\tau[(D_{ij})] = (\tau(D_{ij})) \quad \left(D_{ij} \in \mathbf{A}_{ij}, \tau(D_{ij}) = \sum_{D_{ij}^{\alpha} \in \mathbf{E}_i \setminus \mathbf{E}_i D_{ij} \mathbf{E}_j} (\mathbf{E}_i D_{ij}^{\alpha}) \right), \quad (2.19)$$

образуют базис этого кольца над $\mathbb{Z}$. Элементы (2.19), где все матрицы D_{ij} содержатся в соответствующих подмножествах подобий

$$\mathbf{S}_{ij} = \bigcup_{\mu \geq 1, \gcd(\mu, q)=1} \mathbf{A}_{ij}(\mu) \subset \mathbf{A}_{ij},$$

и их линейные комбинации с целочисленными коэффициентами мы будем называть *регулярными элементами кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$* . Подмножество $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$ всех регулярных элементов образует, очевидно, подкольцо кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$, *регулярное подкольцо кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$* или *кольцо классов подобия матрицы Q* , которое само может быть интерпретировано как кольцо двойных классов:

$$\mathcal{H}_r\langle Q \rangle = D(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h; \mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{12}, \dots, \mathbf{S}_{hh}) \subset \mathcal{H}\langle Q \rangle. \quad (2.20)$$

Для элемента

$$\tau = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \tau(D_{ij}^{\alpha}) \in \mathcal{H}_r\langle Q \rangle \quad (2.21)$$

мы положим

$$\tau^* = \sum_{\alpha} a_{\alpha} {}^t\tau^*(D_{ij}^{\alpha}), \quad \text{где} \quad \tau^*(D) = \tau(D^*) = \tau(\mu(D)D^{-1}). \quad (2.22)$$

ЛЕММА 2.4. *Отображение $\tau \mapsto \tau^*$ является линейным антиавтоморфизмом порядка 2 кольца классов подобия $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 отображение $\tau \mapsto \tau^*$ является линейным отображением кольца $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$ в себя и удовлетворяет соотношению $(\tau^*)^* = \tau$. В частности, это отображение взаимно однозначно.

Остается проверить, что отображение $\tau \mapsto \tau^*$ является мультипликативным антигомоморфизмом, т.е. удовлетворяет соотношениям

$$(\tau\tau_1)^* = \tau_1^*\tau^* \quad \text{для} \quad \tau, \tau_1 \in \mathcal{H}_r\langle Q \rangle. \quad (2.23)$$

Эти соотношения достаточно проверить для базисных элементов (2.19) кольца $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$. Прежде всего отметим, что с помощью вполне элементарных, но довольно утомительных вычислений, основанных на технике, использованной в доказательстве предложения 3.1.7 книги [9], можно проверить, что

$$(\tau(D)\tau(D'))^* = \tau^*(D')\tau^*(D) \quad \text{для всех} \quad D \in \mathbf{S}_{ik}, \quad D' \in \mathbf{S}_{kj} \quad (i, j, k = 1, \dots, h), \quad (2.24)$$

где отображение $*$ слева по линейности продолжено на целочисленные линейные комбинации двойных классов $\tau(D'')$ с $D'' \in \mathbf{S}_{ij}$. Тогда, с одной стороны, мы имеем

$$\begin{aligned} ((\tau(D_{ik}))(\tau(D'_{kj})))_{ij}^* &= \left(\sum_k \tau(D_{ik})\tau(D'_{kj}) \right)_{ij}^* = \left(\sum_k \tau^*(D'_{kj})\tau^*(D_{ik}) \right)_{ji} \\ &= \left(\sum_k \tau^*(D'_{ki})\tau^*(D_{jk}) \right)_{ij}. \end{aligned}$$

А с другой стороны, получаем

$$((\tau(D'_{ik}))^*(\tau(D_{kj}))^*)_{ij} = ((\tau^*(D'_{ki}))(\tau^*(D_{jk})))_{ij} = \left(\sum_k \tau^*(D'_{ki})\tau^*(D_{jk}) \right)_{ij}.$$

Сравнение этих выражений доказывает соотношения (2.23) для базисных элементов. Лемма 2.4 доказана.

Вообще говоря, кольцо $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q_1, \dots, Q_h)$ некоммутативно, однако при определенных условиях элементы этого кольца удовлетворяют важным коммутационным соотношениям, аналогичным соотношениям (1.4) в случае $h = 1$. Чтобы сформулировать эти соотношения, мы введем некоторые обозначения. Согласно теории элементарных делителей для группы $\Lambda = GL_m(\mathbb{Z})$ (см., например [9; лемма 3.2.2]), каждый двойной класс $\Lambda D \Lambda$ неособой матрицы $D \in \mathbb{Z}_m^m$ содержит единственного диагонального представителя вида

$$\text{ed}(D) = \text{diag}(d_1, \dots, d_m) \quad \text{с} \quad d_i \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad d_i \mid d_{i+1}. \quad (2.25)$$

Если $\det D > 0$, то то же, очевидно, справедливо и для двойного класса $\Lambda_+ D \Lambda_+$ по группе $\Lambda_+ = SL_m(\mathbb{Z})$. Диагональная матрица $\text{ed}(D)$ называется *матрицей элементарных делителей* матрицы D , а числа $d_i = d_i(D)$ ее *элементарными делителями*. Элементарные делители удовлетворяют соотношениям

$$d_i(D)d_i(D') = d_i(DD') \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{если} \quad \gcd(\det(D), \det(D')) = 1, \quad (2.26)$$

и соотношениям

$$d_1(D) \cdots d_m(D) = |\det D|. \quad (2.27)$$

Для каждой матрицы элементарных делителей

$$D = \text{ed}(D) = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$$

Мы определим элемент кольца $\mathcal{H}$ вида

$$\tau(D) = \tau[d_1, \dots, d_m] = (\tau_{ij}(d_1, \dots, d_m)), \quad (2.28)$$

где для $i, j = 1, \dots, h$ мы полагаем

$$\tau_{ij}(D) = \tau_{ij}[d_1, \dots, d_m] = \begin{cases} \sum_{D' \in \mathbf{E}_i \setminus \mathbf{A}_{ij} \cap \Lambda_+ D \Lambda_+} (\mathbf{E}_i D'), & \text{если } \mathbf{A}_{ij} \cap \Lambda_+ D \Lambda_+ \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{A}_{ij} \cap \Lambda_+ D \Lambda_+ = \emptyset, \end{cases}$$

и $\mathbf{A}_{ij}$ — множества автоморфов (2.17). Кроме того, для целого положительного числа μ мы введем сумму элементов (2.28) вида

$$\tau(\mu) = \sum_{\substack{d_i \in \mathbb{N}, \ d_i | d_{i+1}, \\ d_1 \cdots d_m = \mu^{m/2}}} \tau[d_1, \dots, d_m] = (\tau_{ij}(\mu)), \quad (2.29)$$

аналогичную элементу (1.3), где

$$\tau_{ij}(\mu) = \sum_{D' \in \mathbf{E}_i \setminus \mathbf{A}_{ij}(\mu)} (\mathbf{E}_i D').$$

Наконец, будет удобно определить для целых положительных d “скалярные” элементы кольца $\mathcal{H}$ вида

$$[d] = [d]_m = \tau[\underbrace{d, \dots, d}_m] = \text{diag}((\mathbf{E}_1(d \cdot \mathbf{1}_m)), \dots, (\mathbf{E}_h(d \cdot \mathbf{1}_m))). \quad (2.30)$$

ЛЕММА 2.5. *Элементарные делители каждого подобия $D \in \mathbf{S}_{ij}$ удовлетворяют соотношениям*

$$\text{ed}(D) = \text{ed}(\mu(D)D^{-1}) \Leftrightarrow d_k(D)d_{m-k+1}(D) = \mu(D) \quad (k = 1, \dots, m),$$

т.е. соответствующие элементы (2.28) удовлетворяют условию

$$\tau(D)^* = \tau(D) \quad (D \in \mathbf{S}_{ij}, \ i, j = 1, \dots, h);$$

в частности,

$$\tau(\mu)^* = \tau(\mu), \quad \text{если} \quad \gcd(\mu, \det Q) = 1. \quad (2.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\det Q_i = \det Q_j = \det Q$, то из соотношения $Q_i[D] = \mu(D)Q_j$ следует, что $\det D = \mu(D)^{m/2}$ и ${}^t D Q_i = Q_j \mu(D) D^{-1}$. Так как $\gcd(\mu(D), \det Q) = 1$, то из последнего соотношения, согласно (2.26), следует соотношение $\text{ed}(D) \text{ed}(Q) = \text{ed}(Q) \text{ed}(\mu(D) D^{-1})$. Остальное следует непосредственно из определений. Лемма 2.5 доказана.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть Q – неособая четная матрица порядка t , и пусть $\tau(D) = \tau[d_1, \dots, d_m]$, $\tau(D') = \tau[d'_1, \dots, d'_m]$ – два ненулевых элемента вида (2.28). Предположим, что элементарные делители матриц D и D' удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \gcd(d_m/d_1, d'_m/d'_1) &= 1 \quad \text{и} \\ \gcd(d_m/d_1, \det Q) &= 1 \quad \text{или} \quad \gcd(d'_m/d'_1, \det Q) = 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Тогда в кольце $\mathcal{H}(Q)$ имеют место следующие соотношения:

$$\tau(D)\tau(D') = \tau(DD') = \tau(D')\tau(D). \quad (2.33)$$

В частности, для каждого элемента вида (2.28) и каждого элемента (2.30) выполняются соотношения

$$[d]\tau(D) = \tau(D)[d] = \tau(dD). \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы следуем схеме доказательства, использованной в работе [7; теорема 2.2], с необходимыми изменениями. Отметим, прежде всего, что частный случай (2.34) немедленно и прямо следует из определений. Поэтому соотношения (2.33) достаточно доказать, предполагая также, что $d_1 = d'_1 = 1$. В этом случае условия (2.32), очевидно, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \gcd(\det D, \det D') &= 1 \quad \text{и} \\ \gcd(\det D, \det Q) &= 1 \quad \text{или} \quad \gcd(\det D', \det Q) = 1, \end{aligned}$$

что мы и будем предполагать ниже. Для доказательства первого из соотношений (2.33) достаточно проверить, что

$$\sum_k \tau_{ik}(D)\tau_{kj}(D') = \tau_{ij}(DD') \quad (i, j = 1, \dots, h).$$

Пусть

$$\tau_{ik}(D) = \sum_{\alpha} (\mathbf{E}_i A_{ik}^{\alpha}), \quad \tau_{kj}(D') = \sum_{\beta} (\mathbf{E}_k B_{kj}^{\beta})$$

и

$$\tau_{ij}(DD') = \sum_{\gamma} (\mathbf{E}_i C_{ij}^{\gamma}).$$

Тогда мы должны показать, что в качестве множества представителей C_{ij}^{γ} из классов $\mathbf{E}_i \backslash \mathbf{A}_{ij} \cap \Lambda_+ DD' \Lambda_+$ можно взять множество всех произведений вида $A_{ik}^{\alpha} B_{kj}^{\beta}$. Так как определители $\det D$ и $\det D'$ взаимно просты, то по аналогии с [9; предложение 3.2.5] можно легко проверить, что следующие соотношения выполняются в кольце вида (2.7) двойных классов $D(\Lambda, \Sigma)$ полугруппы $\Sigma = \{M \in \mathbb{Z}_m^m \mid \det M > 0\}$ по группе $\Lambda = \Lambda_+^m$:

$$\sum_{A' \in \Lambda \backslash \Lambda D \Lambda} (\Lambda A') \cdot \sum_{B' \in \Lambda \backslash \Lambda D' \Lambda} (\Lambda B') = \sum_{A', B'} (\Lambda A' B') = \sum_{C' \in \Lambda \backslash \Lambda DD' \Lambda} (\Lambda C'). \quad (2.35)$$

Из этих соотношений и леммы 2.2 следует, что все произведения $A_{ik}^{\alpha} B_{jk}^{\beta}$ содержатся в двойном классе $\Lambda DD' \Lambda$ и принадлежат различным левым классам по модулю Λ , содержащимся в этом двойном классе. В частности, они

принадлежат различным левым классам по подгруппе $\mathbf{E}_i \subset \Lambda$. Пусть теперь $C' \in \mathbf{E}_i \setminus \mathbf{A}_{ij} \cap \Lambda DD' \Lambda$ – произвольный представитель. В силу (2.35) матрицу C' можно записать в виде

$$C' = A'B', \quad \text{где } A' \in \Lambda D \Lambda, \quad B' \in \Lambda D' \Lambda.$$

Так как $C' \in \mathbf{A}_{ij}$, то $Q_i[A'B'] = \mu\mu'Q_j$, и поэтому

$$\mu^{-1}Q_i[A'] = \mu'Q_j[(B')^{-1}], \quad (2.36)$$

где $\mu = \mu(D)$ и $\mu' = \mu(D')$. Знаменатели коэффициентов рациональной симметрической матрицы слева в (2.36) являются произведениями простых чисел, делящих число $\mu = (\det D)^{2/m}$, в то время как знаменатели коэффициентов матрицы справа являются произведениями простых чисел, делящих число $\det B' = \det D'$. Поскольку числа $\det D$ и $\det D'$ взаимно просты, обе матрицы в соотношении (2.36) являются целочисленными. Кроме того, поскольку по меньшей мере одно из чисел $\det D$, $\det D'$ нечетно, обе матрицы являются четными. Так как по меньшей мере одно из чисел $\det D$, $\det D'$, скажем, $\det D = \det A'$, взаимно просто с $\det Q = \det Q_i$, то четная матрица $\mu^{-1}Q_i[A']$ подобна матрице Q_i и, таким образом, эквивалентна одной из матриц $Q_1, \dots, Q_h$, скажем, матрице Q_k :

$$\mu^{-1}Q_i[A'] = Q_k[\lambda] \quad \text{с } \lambda \in \Lambda,$$

так что $Q_i[A'\lambda^{-1}] = \mu Q_k$. Таким образом, $A'\lambda^{-1} \in \mathbf{A}_{ik} \cap \Lambda D \Lambda$, откуда $A'\lambda^{-1} = \delta A_{ik}^\gamma$ с $\delta \in \mathbf{E}_i$. Но тогда поскольку

$$\mu\mu'Q_j = Q_i[A'B'] = Q_i[A'\lambda^{-1} \cdot \lambda B'] = \mu Q_k[\lambda B'],$$

то $\lambda B' \in \mathbf{A}_{kj} \cap \Lambda D' \Lambda$, и отсюда $\lambda B' = \delta_1 B_{kj}^\beta$ с $\delta_1 \in \mathbf{E}_k$. Тогда

$$C' = A'B' = \delta A_{ik}^\gamma \delta_1 B_{kj}^\beta = \delta \delta' A_{ik}^\alpha B_{kj}^\beta,$$

где $\delta \delta' \in \mathbf{E}_i$. Это доказывает теорему 2.6.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Элементы вида (2.29) удовлетворяют соотношениям*

$$\tau(\mu)\tau(\mu') = \tau(\mu\mu') = \tau(\mu')\tau(\mu), \quad (2.37)$$

если

$$\begin{aligned} \gcd(\mu, \mu') &= 1 \quad \text{и} \\ \gcd(\mu, \det Q) &= 1 \quad \text{или} \quad \gcd(\mu', \det Q) = 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суммируя соотношения (2.33) по всем матрицам элементарных делителей вида $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ с $d_1 \cdots d_m = \mu^{m/2}$ и вида $D' = \text{diag}(d'_1, \dots, d'_m)$ с $d'_1 \cdots d'_m = (\mu')^{m/2}$, мы, очевидно, получаем соотношения (2.37).

На основании следствия 2.7 мы заключаем, что формальный ряд Дирихле с коэффициентами $\tau(1), \tau(2), \dots$, аналогично разложению (1.5), может быть разложен в формальное эйлерово произведение:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tau(\mu)}{\mu^s} = \left(\sum_{\nu | (\det Q)^\infty} \frac{\tau(\nu)}{\nu^s} \right) \prod_{p \nmid \det Q} \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{\tau(p^\delta)}{p^{\delta s}}, \quad (2.38)$$

где мы рассматриваем выражение μ^s просто как формальный квазихарактер мультипликативной полугруппы $\mathbb{N}$ и где ν и p пробегает все положительные целые числа, делящие некоторую степень числа $\det Q$, и простые числа, не делящие число $\det Q$, соответственно. В работе [3] было выдвинуто предположение, что для каждого простого числа p , не делящего $\det Q$, формальный степенной ряд с коэффициентами $\tau(1) = [1]$, $\tau(p), \tau(p^2), \dots$ является (формально) рациональной дробью над кольцом $\mathcal{H}\langle Q \rangle$ со знаменателем степени 2^k и числителем степени не больше $2^k - 2$, если порядок m матрицы Q нечетен вида $2k - 1$ или четен вида $2k$:

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} \tau(p^\delta) t^\delta = R_p(t)^{-1} S_p(t), \quad (2.39)$$

где

$$R_p(t) = [1] + \sum_{1 \leq i \leq 2^k} \rho_i t^i, \quad S_p(t) = [1] + \sum_{1 \leq j \leq 2k-2} \sigma_j t^j$$

с $\rho_i = \rho_i(p)$, $\sigma_j = \sigma_j(p) \in \mathcal{H}\langle Q \rangle$. В этом случае мы будем говорить, что формальный степенной ряд над кольцом $\mathcal{H}\langle Q \rangle$ вида

$$Z_p(t, Q) = Z_p(t, \mathbf{q}) = R_p(t)^{-1} \quad (2.40)$$

является *локальным дзета-рядом матрицы Q* . В работе [3] было доказано, что это предположение справедливо для любых четных неособых матриц Q порядков $m = 2, 3$ и 4 . А именно, для каждого простого числа p , не делящего $\det Q$, имеют место следующие формальные тождества:

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta=0}^{\infty} \tau(p^\delta) t^\delta \\ &= \begin{cases} ([1] - \tau(p)t + \chi_Q(p)[p]t^2)^{-1} & (m=2), \\ ([1] - (\tau(p^2) - [p])t^2 + p[p^2]t^4)^{-1}([1] + [p]t^2) & (m=3), \\ ([1] - \tau(p)t + \tilde{\tau}(p^2)t^2 - p[p]\tau(p)t^3 + p^2[p^2]t^4)^{-1} \\ \quad \times ([1] - \chi_Q(p)[p]t^2) & (m=4), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.41)$$

где χ_Q в случае $m = 2$ обозначает характер квадратичной формы $\mathbf{q}(X)$ с матрицей Q , т.е. (для p , не равных 2 и не делящих $\det Q$) $\chi_Q(p) = 1$, если сравнение $\mathbf{q}(X) \equiv 0 \pmod{p}$ имеет нетривиальное решение, и $\chi_Q(p) = -1$ в противном случае, а в случае $m = 4$ значение $\chi_Q(p) = \left(\frac{\det Q}{p} \right)$ равно символу Лежандра, и где

$$\tilde{\tau}(p^2) = \chi_Q(p)\tau[1, p, p, p^2] + (1 + \chi_Q(p))p[p] \quad (2.42)$$

(см. работы [10] и [3; теоремы 1.1 и 1.3]). Отсюда следует, что в этих случаях локальные дзета-ряды имеют вид

$$Z_p(t, Q) = ([1] - \tau(p)t + \chi_Q(p)[p]t^2)^{-1} \quad (m=2); \quad (2.43)$$

$$Z_p(t, Q) = ([1] - (\tau(p^2) - [p])t^2 + p[p^2]t^4)^{-1} \quad (m=3); \quad (2.44)$$

$$Z_p(t, Q) = ([1] - \tau(p)t + \tilde{\tau}(p^2)t^2 - p[p]\tau(p)t^3 + p^2[p^2]t^4)^{-1} \quad (m=4). \quad (2.45)$$

Из приведенных формул суммирования следуют новые коммуникационные соотношения в кольцах классов подобия (2.20) четных неособых матриц Q порядков 2, 3 и 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть Q – четная неособая матрица порядка $m = 2, 3$ или 4, и пусть p – простое число, не делящее число $\det Q$. Тогда все элементы вида $\tau(p^\delta) \in \mathcal{H}_r\langle Q \rangle$ с $\delta = 0, 1, 2, \dots$ принадлежат кольцу многочленов над $\mathbb{Z}$ от коммутирующих друг с другом элементов $\tau(p)$, $[p]$, если $m = 2$, элементов $\tau(p^2)$, $[p]$, если $m = 3$, элементов $\tau(p)$, $\tau[1, p, p, p^2]$, $[p]$, если $m = 4$ и $\chi_Q(p) = 1$, и элементов $\tau[1, p, p, p^2]$, $[p]$, если $m = 4$ и $\chi_Q(p) = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случаях $m = 2$ и $m = 3$ утверждение непосредственно следует из формул (2.41) и (2.34). В случае $m = 4$ по той же причине достаточно проверить, что элемент $\tau[1, p, p, p^2]$ коммутирует с $\tau(p)$, если $\chi_Q(p) = 1$, и что $\tau(p) = 0$, если $\chi_Q(p) = -1$. Последнее следует из [3; (6.13)]. Если $\chi_Q(p) = 1$, то по [3; (6.37)] получаем соотношение

$$\tau[1, p, p, p^2]\tau(p) = \tau[1, p, p^2, p^3] + (p+1)[p]\tau(p).$$

Откуда, используя леммы 2.5 и 2.4, мы имеем

$$\tau[1, p, p, p^2]\tau(p) = (\tau[1, p, p, p^2]\tau(p))^* = \tau(p)^*\tau[1, p, p, p^2]^* = \tau(p)\tau[1, p, p, p^2].$$

Предложение 2.8 доказано.

Предположим теперь, что задано комплексное представление

$$\mathcal{H}_r\langle Q \rangle \ni \tau \mapsto |\tau$$

кольца $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$ линейными операторами, и пусть P – некоторый собственный вектор всех операторов $|\tau$ вида $|\tau(\mu)$ для μ , взаимно простых со ступенью q матрицы Q , так что $P|\tau(\mu) = \lambda(\tau(\mu))P$, где $\lambda(\tau(\mu))$ обозначают соответствующие собственные числа. Тогда по аналогии с теорией дзета-функций зигелевых модулярных форм можно рассмотреть степенные ряды

$$Z_p(t, P) = Z_p(t, P, Q) = \left(1 + \sum_{1 \leq i \leq 2^k} \lambda(\rho_i) t^i\right)^{-1}, \quad \text{где } t = p^{-s}, \quad (2.46)$$

и эйлерово произведение

$$Z(s, P) = \prod_{p \nmid \det Q} Z_p(p^{-s}, P), \quad (2.47)$$

которые естественно называть соответственно *локальной* и *глобальной дзета-функцией* кольца $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$, отвечающей собственному вектору P , и поставить вопрос о свойствах этих дзета-функций. Ниже мы увидим, что в некоторых случаях ортогональные дзета-функции могут быть явно выражены через спинорные дзета-функции подходящих зигелевых модулярных форм.

§ 3. Представления на гармонических векторах

В этом параграфе мы определим линейные представления колец классов автоморфов положительно-определенных квадратичных форм на пространствах гармонических векторов и рассмотрим вопрос о существовании собственных векторов для этих представлений.

Сначала мы напомним определение и свойства гармонических многочленов относительно положительно-определенных квадратичных форм. Многочлен $P_0 = P_0(X)$ от mn переменных x_{ij} над $\mathbb{C}$, где $X = (x_{ij})$ – матрица из переменных размера $m \times n$, называется *гармоническим многочленом порядка m , рода n и веса k* , где k – целое неотрицательное число, если он является гармонической функцией от mn переменных в том смысле, что выполняется условие

$$\Delta P_0 = \sum_{ij} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_{ij}^2} = 0 \quad (3.1)$$

и имеют место соотношения

$$P_0(XA) = (\det A)^k P_0(X) \quad \text{для любых матриц } A \in GL_n(\mathbb{C}). \quad (3.2)$$

Из определения следует, что для каждого гармонического многочлена $P_0(X)$ порядка m , рода n и веса k и каждой матрицы U из вещественной ортогональной группы $O_m(\mathbb{R})$ порядка m многочлен $P_0(UX)$ снова является гармоническим порядка m , рода n и веса k . В этом смысле определение гармонических многочленов связано с квадратичной формой $\mathbf{q}_0 = x_1^2 + \dots + x_m^2$ с матрицей $Q_0 = 2 \cdot 1_m$, группой вещественных автоморфизмов которой является как раз ортогональная группа порядка m . Теперь мы определим гармонические многочлены, отвечающие в том же смысле любой вещественной положительно-определенной квадратичной форме (2.9) от m переменных с матрицей Q : так как форма положительно определена, то существует вещественная матрица S такая, что

$$Q = 2^t S S.$$

В этом случае мы определим для гармонического многочлена P_0 порядка m , рода n и веса k *гармонический многочлен $P = P_Q(X)$ рода n и веса k относительно квадратичной формы с матрицей Q* (или просто *относительно Q*) формулой

$$P(X) = P_Q(X) = (P_0|S)(X) = P_0(SX). \quad (3.3)$$

Это многочлен от элементов матрицы X , который на основании условия (3.2) удовлетворяет соотношениям

$$P(XA) = (\det A)^k P(X) \quad \text{для каждой матрицы } A \in GL_n(\mathbb{C}). \quad (3.4)$$

Ясно также, что для каждой матрицы

$$U \in O(Q, R) = \{U \in \mathbb{R}_m^m \mid Q[U] = Q\} = S^{-1} O_m(\mathbb{R}) S$$

многочлен

$$(P|U)(X) = P(UX) = P_0(SUX) = (P_0|SUS^{-1})(SX)$$

снова является гармоническим многочленом рода n и веса k относительно Q . Множество $\mathcal{P}_k^n(Q)$ всех гармонических многочленов рода n и веса k относительно Q образует, очевидно, линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Из соотношений (3.4) следует, что каждый из многочленов, содержащихся в пространстве $\mathcal{P}_k^n(Q)$, является однородным степени nk . Таким образом, пространство $\mathcal{P}_k^n(Q)$ конечномерно. Следующая лемма содержит описание пространств гармонических многочленов рода n и веса k относительно положительно-определенных квадратичных форм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пространство $\mathcal{P}_k^n(Q)$ гармонических многочленов относительно матрицы Q положительно-определенной квадратичной формы от t переменных линейно порождается над $\mathbb{C}$ многочленами вида*

$$P(X) = \det({}^t\Omega QX)^k, \quad (3.5)$$

где Ω – некоторая матрица из $\mathbb{C}_n^m$, удовлетворяющая в случае $k > 1$ условию ${}^t\Omega Q\Omega = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению каждый многочлен $P \in \mathcal{P}_k^n(Q)$ имеет вид $P(X) = P_0(SX)$, где S – вещественная матрица, удовлетворяющая условию $Q = 2{}^tSS$, и где $P_0 \in \mathcal{P}_k^n(Q_0)$ с $Q_0 = 2 \cdot 1_m$. Согласно следствию теории Кашивары–Вернь [11], отмеченному Э. Фрайтагом в работе [12; предложение 6.20], доказываемое предложение справедливо для $Q = Q_0$. Тогда оно справедливо также и для $Q = {}^tSQ_0S$, так как соотношение ${}^t\Omega Q\Omega = 0$ означает, что ${}^t(S\Omega)Q_0(S\Omega) = 0$. (Простое доказательство для случая $n = 1$ см. в [13; гл. VI].) Предложение 3.1 доказано.

Общая линейная группа $GL_m(\mathbb{C})$ действует на функциях $P = P(X): \mathbb{C}_n^m \mapsto \mathbb{C}$ линейными преобразованиями переменных вида

$$U \mapsto |U: P(X) \mapsto (P|U)(X) = P(UX) \quad (U \in GL_m(\mathbb{C})). \quad (3.6)$$

Эти операторы, очевидно, сохраняют соотношения (3.4) и удовлетворяют соотношениям

$$|U||V| = |UV| \quad (U, V \in GL_m(\mathbb{C})). \quad (3.7)$$

ЛЕММА 3.2. *Каждый из операторов $|U$ с $U \in GL_m(\mathbb{R})$ отображает пространство $\mathcal{P}_k^n(Q)$ биективно на пространство $\mathcal{P}_k^n(Q[U])$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если матрица S удовлетворяет соотношению $2{}^tSS = Q$, то $Q[U] = 2{}^t(SU)(SU)$. Таким образом, по определению,

$$P_{Q[U]}(X) = P_0(SUX) = (P_Q|U)(X),$$

где многочлен $P_0 = P_{2 \cdot 1_m}(X) \in \mathcal{P}_k^n(Q_0)$ является гармоническим рода n и веса k . Лемма 3.2 доказана.

Определим теперь (эрмитово) скалярное произведение функций $P, P': \mathbb{R}_n^m \mapsto \mathbb{C}$ относительно матрицы Q положительно-определенной квадратичной формы от t переменных, полагая

$$(P, P') = (P, P')_Q = (\det Q)^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{1}{2}Q[X] \leq 1_n} P(X) \overline{P'(X)} dX, \quad (3.8)$$

где $dX = d(x_{ij}) = \prod_{i,j} dx_{ij}$ обозначает евклидов элемент объема на $\mathbb{R}_n^m$ и неравенство $A \leq B$ для двух вещественных симметрических матриц одинакового порядка означает, что матрица $B - A$ является неотрицательно-полуопределенной.

ЛЕММА 3.3. Для каждой матрицы $U \in GL_m(\mathbb{R})$ и любых функций $P, P': \mathbb{R}_n^m \mapsto \mathbb{C}$ скалярное произведение (3.8) удовлетворяет соотношению

$$(P|U, P'|U)_{Q[U]} = (P, P')_Q, \quad (3.9)$$

где $|U$ – оператор (3.6). В частности, для каждого вещественного положительного числа μ выполняется соотношение

$$(P|\mu^{-1/2}U, P')_{\mu^{-1}Q[U]} = (P, P'|\mu^{1/2}U^{-1})_Q. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведя замену переменных $X \mapsto Y = UX$, получаем

$$\begin{aligned} (P|U, P'|U)_{Q[U]} &= |\det U|^n (\det Q)^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{1}{2}Q[U X] \leq 1_n} P(UX) \overline{P'(UX)} dX \\ &= (\det Q)^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{1}{2}Q[Y] \leq 1_n} P(Y) \overline{P'(Y)} dY. \end{aligned}$$

Формула (3.10) следует из (3.9), если мы заменим матрицу U на $\mu^{-1/2}U$ и функцию P' на $P'|\mu^{1/2}U^{-1}$. Лемма 3.3 доказана.

Пусть теперь Q – некоторая четная положительно-определенная матрица порядка m , и пусть $Q_1, \dots, Q_h$ – некоторая система представителей из классов собственной эквивалентности (2.14), содержащихся в классе собственного подобию (2.13) матрицы Q , так что имеет место разложение (2.15). Гармоническим вектором рода n и веса k относительно системы $Q_1, \dots, Q_h$ мы называем строку вида

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_h), \quad \text{где } P_i \in \mathcal{P}_k^n(Q_i). \quad (3.11)$$

Относительно обычных правил сложения строк и их умножения на комплексные числа множество

$$\mathcal{P}_k^n\langle Q \rangle = \mathcal{P}_k^n(Q_1, \dots, Q_h)$$

всех гармонических векторов относительно системы $Q_1, \dots, Q_h$, где Q – некоторая матрица, содержащаяся в классе подобия матриц Q_i , может рассматриваться как линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Мы снабдим пространство $\mathcal{P}_k^n\langle Q \rangle$ эрмитовым скалярным произведением, определяя скалярное произведение $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ двух векторов $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_h)$ и $\mathbf{P}' = (P'_1, \dots, P'_h)$ из $\mathcal{P}_k^n\langle Q \rangle$ формулой

$$(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \sum_{i=1}^h (P_i, P'_i)_{Q_i} = (\det Q)^{n/2} \sum_{i=1}^h \int_{\frac{1}{2}Q_i[X] \leq 1_n} P_i(X) \overline{P'_i(X)} dX, \quad (3.12)$$

где $(P_i, P'_i)_{Q_i}$ – скалярные произведения (3.8) на пространствах $\mathcal{P}_k^n(Q_i)$.

Пусть теперь $\mathcal{I}_k^n(Q_i)$ обозначает подпространство всех многочленов из $\mathcal{P}_k^n(Q_i)$, которые инвариантны относительно всех операторов $|U$ вида (3.6) с $U \in \mathbf{E}_i = E^+(Q_i)$:

$$\mathcal{I}_k^n(Q_i) = \{P \in \mathcal{P}_k^n(Q_i) \mid P(UX) = P(X) \text{ для всех } U \in \mathbf{E}_i\}, \quad (3.13)$$

и

$$\mathcal{I}_k^n\langle Q \rangle = \mathcal{I}_k^n(Q_1, \dots, Q_h) = \{(P_1, \dots, P_h) \mid P_i \in \mathcal{I}_k^n(Q_i)\} \quad (3.14)$$

– подпространство пространства $\mathcal{P}_k^n\langle Q \rangle$, состоящее из векторов, покомпонентно инвариантных относительно соответствующих групп единиц. Кольцо классов автоморфов $\mathcal{H}\langle Q \rangle = \mathcal{H}(Q_1, \dots, Q_h)$ естественно действует на пространстве $\mathcal{I}_k^n$ линейными операторами: для $\tau = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H}\langle Q \rangle$ мы определим оператор Гекке $|\tau$ на $\mathcal{I}_k^n$, полагая

$$|\tau = |(\tau_{ij}) \mathbf{P} = (P_i) \mapsto \mathbf{P}|\tau = \left(\sum_{i=1}^h P_i|\tau_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^h P_i|\tau_{ih} \right), \quad (3.15)$$

где для $\tau_{ij} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{E}_i D_{\alpha}) \in \mathcal{H}\langle Q \rangle_{ij}$ с $D_{\alpha} \in \mathbf{A}_{ij}$ (см. (2.17)) и $P_i \in \mathcal{I}_k^n(Q_i)$ использовано обозначение

$$P_i|\tau_{ij} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} P_i|D_{\alpha} \in \mathcal{P}_k^n(Q_j) \quad (3.16)$$

и где операторы $|D_{\alpha}$ определяются формулой (3.6). Так как $P_i \in \mathcal{I}_k^n(Q_i)$, то каждый из многочленов (3.16) не зависит от выбора представителей D_{α} в классе $\mathbf{E}_i D_{\alpha}$. Так как $\tau_{ij}U = \tau_{ij}$ для всех $U \in \mathbf{E}_j$, мы заключаем, что каждый из многочленов (3.16), фактически, принадлежит пространству $\mathcal{I}_k^n(Q_j)$. Поэтому каждый из операторов $|\tau$ отображает подпространство $\mathcal{I}_k^n\langle Q \rangle$ в себя. Операторы $|\tau$, очевидно, линейны и, как легко следует из определения умножения в кольце $\mathcal{H}\langle Q \rangle$, оператор, соответствующий произведению двух элементов кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$, равен произведению операторов, отвечающих сомножителям:

$$|\tau\tau' = |\tau|\tau' \quad (\tau, \tau' \in \mathcal{H}\langle Q \rangle).$$

Таким образом, мы получаем линейное представление кольца $\mathcal{H}\langle Q \rangle$ на пространстве $\mathcal{I}_k^n\langle Q \rangle$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle = D(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h; \mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{12}, \dots, \mathbf{S}_{hh})$ – кольцо классов подобия некоторой четной положительно-определенной матрицы Q .

Предположим, что порядки групп единиц $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h$ равны друг другу. Тогда для каждого элемента τ кольца $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$ операторы Гекке $|\tau$ и $|\tau^*$ на пространстве $\mathcal{I}_k^n\langle Q \rangle$, где τ^* – элемент (2.22), сопряжены относительно скалярного произведения (3.13):

$$(\mathbf{P}|\tau, \mathbf{P}') = (\mathbf{P}, \mathbf{P}'|\tau^*) \quad (\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathcal{I}_k^n\langle Q \rangle, \quad \tau \in \mathcal{H}_r\langle Q \rangle). \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать соотношения (3.17) для элементов $\tau = (\tau(D_{ij}))$ вида (2.19) с $D_{ij} \in \mathbf{S}_{ij}$. В этом случае, используя (2.22), получаем

$$\tau^* = (\tau(D_{ij}))^* = {}^t(\tau(D_{ij}^*)) = {}^t(\tau(\mu(D_{ij})D_{ij}^{-1})).$$

По лемме 2.1 каждый двойной класс $\mathbf{E}_i D_{ij} \mathbf{E}_j$ содержит общую систему представителей $\{D_{ij}^\alpha\}$ из левых классов по модулю $\mathbf{E}_i$ и правых классов по модулю $\mathbf{E}_j$. Тогда, используя лемму 2.2, мы легко заключаем, что система $\{\mu(D_{ij})(D_{ij}^\alpha)^{-1}\}$ является общей системой представителей из левых классов по модулю $\mathbf{E}_j$ и правых классов по модулю $\mathbf{E}_i$, содержащихся в двойном классе $\mathbf{E}_j \mu(D_{ij}) D_{ij}^{-1} \mathbf{E}_i$. В частности, для этой системы представителей имеют место разложения

$$\tau(D_{ij}) = \sum_{\alpha} (\mathbf{E}_i D_{ij}^\alpha) \quad \text{и} \quad \tau(\mu(D_{ij}) D_{ij}^{-1}) = \sum_{\alpha} (\mathbf{E}_j \mu(D_{ij}) (D_{ij}^\alpha)^{-1}). \quad (3.18)$$

Если $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_h)$, то на основании формул (3.15), (3.16) и (3.18) мы получаем

$$\mathbf{P}|\tau = \left(\sum_{i=1}^h \sum_{\alpha} P_i |D_{i1}^\alpha, \dots, \sum_{i=1}^h \sum_{\alpha} P_i |D_{ih}^\alpha \right),$$

где $|D_{ij}^\alpha$ – операторы (3.6). Отсюда, согласно (3.13), следует соотношение

$$(\mathbf{P}|\tau, \mathbf{P}') = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^h \sum_{\alpha} (P_i |D_{ij}^\alpha, P'_j)_{Q_j}.$$

Используя снова формулы (3.15), (3.16) и (3.18), мы можем написать

$$\mathbf{P}'|\tau^* = \left(\sum_{i=1}^h \sum_{\alpha} P'_i |\mu(D_{1i})(D_{1i}^\alpha)^{-1}, \dots, \sum_{i=1}^h \sum_{\alpha} P'_i |\mu(D_{hi})(D_{hi}^\alpha)^{-1} \right),$$

откуда

$$(\mathbf{P}, \mathbf{P}'|\tau^*) = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^h \sum_{\alpha} (P_j, P'_i |\mu(D_{ji})(D_{ji}^\alpha)^{-1})_{Q_j}.$$

По (3.4) и (3.10) мы получаем

$$\begin{aligned} (P_j, P'_i |\mu(D_{ji})(D_{ji}^\alpha)^{-1})_{Q_j} &= \mu(D_{ji})^{nk/2} (P_j, P'_i |\mu(D_{ji})^{1/2} (D_{ji}^\alpha)^{-1})_{Q_j} \\ &= \mu(D_{ji})^{nk/2} (P_j |\mu(D_{ji})^{-1/2} D_{ji}^\alpha, P'_i)_{\mu(D_{ji})^{-1} Q_j [D_{ji}]} = (P_j |D_{ji}^\alpha, P'_i)_{Q_i}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(\mathbf{P}, \mathbf{P}'|\tau^*) = \sum_{i,j=1}^h \sum_{\alpha} (P_j |D_{ji}^\alpha, P'_i) = (\mathbf{P}|\tau, \mathbf{P}').$$

Теорема 3.4 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. В обозначениях и предположениях теоремы 3.4 операторы Гекке $|\tau$ на каждом инвариантном подпространстве пространства $\mathcal{I}_k^n(Q)$, отвечающие любой системе коммутирующих друг с другом элементов $\tau \in \mathcal{H}_r(Q)$, подчиненных условию $\tau^* = \tau$, могут быть одновременно диагонализированы. В частности, в случаях $m = 2$ или $m = 4$ операторы Гекке, отвечающие элементам $\tau(p^\delta)$ с простым p , не делящим $\det Q$, и $\delta = 0, 1, 2, \dots$, могут быть одновременно диагонализированы на каждом инвариантном подпространстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.4 операторы Гекке $|\tau$ для элементов τ , удовлетворяющих условию $\tau^* = \tau$, самосопряжены относительно эрмитова скалярного произведения (3.13). По известной теореме линейной алгебры любое семейство коммутирующих друг с другом самосопряженных линейных операторов на конечномерном гильбертовом пространстве может быть одновременно диагонализировано. Последнее утверждение следует из первого и предположения 2.8. Предложение 3.5 доказано.

Можно предположить, что линейные комбинации с целочисленными коэффициентами элементов вида (2.28), содержащихся в кольце $\mathcal{H}_r\langle Q \rangle$, образуют подкольцо. Если это верно, то из лемм 2.4 и 2.5 следует, что это подкольцо коммутативно. В настоящее время это предположение доказано только для квадратичных форм от $m = 2$ переменных (см. [7; теорема 2.4]).

§ 4. Действие операторов Гекке на гармонические тета-суммы

Пусть заданы четная положительно-определенная матрица Q порядка m и система представителей $Q_1, \dots, Q_h$ из классов эквивалентности (2.14), содержащихся в классе подобия (2.13) матрицы Q , и пусть $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_h)$ – некоторый гармонический вектор (3.11) рода n и веса k относительно системы $Q_1, \dots, Q_h$. Мы определим *гармоническую тета-сумму рода n класса подобия $\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^+$, отвечающую вектору $\mathbf{P}$* , формулой

$$\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) = \theta(Z; P_1, Q_1) + \dots + \theta(Z; P_h, Q_h), \quad (4.1)$$

где переменная Z принадлежит верхней полуплоскости рода n ,

$$\mathbb{H}_n = \{Z = X + iY \in \mathbb{C}_n^n \mid {}^tZ = Z, Y > 0\},$$

и где функция

$$\theta(Z; P_i, Q_i) = \sum_{N \in \mathbb{Z}_n^m} P_i(N) e^{\pi \sqrt{-1} \operatorname{Trace}(Q_i[N]Z)}$$

является *тета-рядом рода n квадратичной формы с матрицей Q_i , соответствующим гармонической форме P_i* . Каждый из этих тета-рядов, очевидно, сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах верхней полуплоскости $\mathbb{H}_n$ и, таким образом, определяет голоморфную функцию от $n(n+1)/2$ комплексных переменных. Разложение Фурье такой функции имеет вид

$$\theta(Z; P_i, Q_i) = \sum_{A \in \mathbb{E}_n, A \geq 0} r(A; P_i, Q_i) e^{\pi \sqrt{-1} \operatorname{Trace}(AZ)} \quad (4.2)$$

с постоянными коэффициентами Фурье вида

$$r(A; P_i, Q_i) = \sum_{N \in \mathbb{Z}_n^m, Q_i[N]=A} P_i(N).$$

Заменяя N на UN с $U \in \Lambda^m = GL_m(\mathbb{Z})$, получаем тождество

$$\theta(Z; P_i|U, {}^tUQ_iU) = \theta(Z; P_i, Q_i),$$

где многочлен $P_i|U$ определен формулой (3.6); в частности,

$$\theta(Z; P_i|U, Q_i) = \theta(Z; P_i, Q_i) \quad \text{для всех } U \in \mathbf{E}_i. \quad (4.3)$$

Заменяя, если это необходимо, каждый из многочленов P_i его усреднением

$$[\#(\mathbf{E}_i)]^{-1} \sum_{U \in \mathbf{E}_i} P_i|U$$

по группе единиц $\mathbf{E}_i$, что не меняет тета-ряда, мы можем, не умаляя общности, предполагать, что $P_i \in \mathcal{I}_k^n(Q_i)$ для $i = 1, \dots, h$, т.е. что $\mathbf{P} \in \mathcal{I}_k^n\langle Q \rangle$.

Согласно работе [14] (см. также [15]), если m четно, то каждый из тета-рядов (4.2) принадлежит пространству $\mathfrak{M}_{m/2+k}^n(q, \chi_Q)$ модулярных форм веса $m/2 + k$ для группы

$$\Gamma_0^n(q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \pmod{q} \right\},$$

где q – степень матрицы Q , с характером (Дирихле) χ_Q по модулю q , удовлетворяющим условиям $\chi_Q(-1) = (-1)^{m/2}$ и

$$\chi_Q(p) = \left(\frac{(-1)^{m/2} \det Q}{p} \right) \quad (\text{символ Лежандра}),$$

если p – нечетное простое число, не делящее степень q . В частности, функция $F = F(Z) = \theta(Z; P_j, Q_j)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\det(CZ + D)^{-(m/2+k)} F((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) = \chi_Q(\det D) F(Z)$$

для каждой матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^n(q)$. Поэтому тета-сумма (4.1) также является модулярной формой,

$$\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) \in \mathfrak{M}_{m/2+k}^n(q, \chi_Q). \quad (4.4)$$

Следуя общей схеме теории операторов Гекке на пространстве зигелевых модулярных форм (см., например, [9; гл. 4] или [6; § 2]), мы напомним теперь основные определения и простейшие свойства (регулярных) операторов Гекке на пространствах $\mathfrak{M}_w^n(q, \chi)$ модулярных форм целого веса w и характера χ для группы $\Gamma_0^n(q)$. Обозначим через

$$\mathcal{H}_0^n(q) = \mathcal{H}(\Gamma_0^n(q), \Sigma_0^n(q))$$

кольцо Гекке–Шимуры (над $\mathbb{C}$) полугруппы

$$\Sigma_0^n(q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{2n}^{2n} \mid {}^t M J_n M = \mu(M) J_n, \mu(M) > 0, \right. \\ \left. \gcd(\det M, q) = 1, C \equiv 0 \pmod{q} \right\} \quad \left(J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \right)$$

относительно группы $\Gamma_0^n(q)$. Кольцо $\mathcal{H}_0^n(q)$ порождено над $\mathbb{C}$ коммутирующими друг с другом алгебраически независимыми элементами

$$\begin{cases} T^n(p) = (\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{p, \dots, p}_n))_{\Gamma_0^n(q)}, \\ T_j^n(p^2) = (\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-j}, \underbrace{p, \dots, p}_j, \underbrace{p^2, \dots, p^2}_{n-j}, \underbrace{p, \dots, p}_j))_{\Gamma_0^n(q)} \quad (1 \leq j \leq n), \end{cases} \quad (4.5)$$

где p пробегает все простые числа, не делящие ступень q , и где

$$(M)_{\Gamma} = \tau(M) = \sum_{M' \in \Gamma \backslash \Gamma M \Gamma} (\Gamma M') \quad (\Gamma = \Gamma_0^n(q), M \in \Sigma_0^n(q)) \quad (4.6)$$

обозначает двойной класс (2.5) матрицы M по модулю $\Gamma_0^n(q)$ (см. [9; теорема 3.3.23]).

Оператор Гекке $|T = |_{w, \chi} T$ на пространстве $\mathfrak{M}_w^n(q, \chi)$ для

$$T = \sum_i c_i (\Gamma_0^n(q) M_i) \in \mathcal{H}_0^n(q)$$

можно определить формулой

$$F|T = \sum_i c_i F|_{w, \chi} M_i \quad (F \in \mathfrak{M}_w^n(q, \chi)), \quad (4.7)$$

где

$$F|_{w, \chi} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \chi(\det A) [\det(CZ + D)]^{-w} F((AZ + B)(CZ + D)^{-1})$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Sigma_0^n(q) \right)$$

обозначают операторы Петерссона. Операторы Гекке не зависят от выбора представителей $M_i \in \Gamma_0^n(q) M_i$ и отображают пространство $\mathfrak{M}_w^n(q, \chi)$ в себя.

Довольно часто операторы Гекке отображают тета-ряды в линейные комбинации аналогичных тета-рядов. Легкое видоизменение частного случая основного результата работы [6; теорема 4.1] может быть сформулировано следующим образом. Пусть Q – четная положительно-определенная матрица четного порядка m и q – ее ступень. Предположим, что двойной класс $\tau(M) \in \mathcal{H}_0^n(q)$ вида (4.6) с $\mu(M) = \mu$, где $n \leq m$, содержится в образе кольца $\mathcal{H}_0^m(q)$ при отображении Жарковской

$$\Psi^{m, n} = \Psi_Q^{m, n} = \Psi_{m/2, \chi_Q} : \mathcal{H}_0^m(q) \mapsto \mathcal{H}_0^n(q) \quad (4.8)$$

(см. [9; § 4.2.4] и [6; § 3]). Тогда образ тета-ряда $\theta(Z, P_i, Q_i)$ рода n каждой положительно-определенной матрицы Q_i , подобной матрице Q , с гармонической формой $P_i \in \mathcal{I}_k^n(Q_i)$ под действием оператора Гекке, отвечающего двойному классу $\tau(M) \in \mathcal{H}_0^n(q)$, может быть записан в виде

$$\theta(Z; P_i, Q_i)|_{\tau(M)} = \sum_{D \in S(Q_i, \mu)/\Lambda_+} I(D, Q_i, \Psi^{n, m}(\tau(M))) \theta(Z; P_i | \mu^{-1} D, \mu^{-1} Q_i[D]),$$

где

$$S(Q_i, \mu) = \{D \in \mathbb{Z}_m^m \mid \det D = \mu^{m/2}, \mu^{-1}Q_i[D] \in \mathbb{E}_m\},$$

$\Lambda_+ = SL_m(\mathbb{Z})$, $\Psi^{n,m}(M) \in \mathcal{H}_0^m(q)$ обозначает прообраз двойного класса $\tau(M)$ при отображении $\Psi^{m,n}$ и где операторы $P \mapsto P|U$ определяются формулой (3.6); при этом $I(D, Q', T)$ – некоторые постоянные (т.е. не зависящие от Z и P_i) коэффициенты, удовлетворяющие соотношениям

$$I(UDV, Q', T) = I(D, Q'[U], T)$$

для всех $U, V \in \Lambda = GL_m(\mathbb{Z})$, $Q' \in \langle Q \rangle$ и $T \in \mathcal{H}_0^m(q)$.

Каждая из матриц $\mu^{-1}Q_i[D]$ с $D \in S(Q_i, \mu)$ собственно подобна матрице $Q_i \simeq^+ Q$ и поэтому собственно эквивалентна одному из представителей из классов эквивалентности $\{Q_1\}^+, \dots, \{Q_h\}^+$, содержащихся в классе подобия $\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^+$, скажем, матрице Q_j , т.е. $\mu^{-1}[D] = Q_j[U]$ с $U \in \Lambda_+$. Отсюда следует, что формулу для действия оператора $|\tau(M)$ можно переписать в виде

$$\theta(Z; P_i, Q_i)|\tau(M) = \mu^{-nk} \sum_{j=1}^h \sum_{D \in R(Q_i, \mu Q_j)/\mathbb{E}_j} I(D, Q_i, \Psi^{n,m}(\tau(M))) \theta(Z; P_i|D, Q_j), \quad (4.9)$$

где мы также использовали соотношения (3.4).

Следующие формулы суммируют все известные в настоящее время результаты вычислений коэффициентов $I(D, Q', T)$ с $Q' \in \langle Q \rangle$: для каждого простого числа p , не делящего ступень q матрицы Q , имеют место формулы

$$I(D, Q', T^m(p)) = \begin{cases} p^{m/2} \prod_{j=1}^{m/2} (1 + \chi_Q(p)p^{-j}), & \text{если } D \in \Lambda D_{m/2}^m(p)\Lambda, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.10)$$

где $\Lambda = GL_m(\mathbb{Z})$, $D_{m/2}^m(p) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m/2}, \underbrace{p, \dots, p}_{m/2})$;

$$I(D, Q', T_{m-1}^m(p^2)) = \begin{cases} \chi_Q(p)p^{(2+m-m^2)/2}, & \text{если } D \in \Lambda D_{m-2,1}^m(p)\Lambda, \\ \alpha_m(p), & \text{если } D \in \Lambda(p1_m), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.11)$$

где $D_{m-2,1}^m(p) = \text{diag}(1, \underbrace{p, \dots, p}_{m-2}, p^2)$ и

$$\begin{aligned} \alpha_m(p) &= \chi_Q(p)p^{(2+m-m^2)/2} \frac{(p^m - 1)}{p - 1} + p^{-m^2/2}(\chi_Q(p)p^{m/2} - 1); \\ I(D, Q', \langle p \rangle_m) &= \begin{cases} p^{-m^2/2}, & \text{если } D \in \Lambda(p1_m), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

где для краткости мы пишем

$$T_n^m(p^2) = (p \cdot 1_{2n})_{\Gamma_0^n(q)} = \langle p \rangle_n.$$

(В работе [4; формула (2.19) и лемма 5.1] суммы $\gamma(Q, D, T)$, аналогичные коэффициентам $I(D, Q, T)$, были определены и вычислены для элементов $T =$

$T^m(p)$. В работе [10; §2] суммы $\gamma(Q, D, T)$ были, фактически, вычислены для элементов $T = \langle p \rangle_m = T_m^m(p^2) = (p1_{2m})_{\Gamma_0^m(q)}$ и $T = T_{m-1}^m(p^2)$. См. также [9; лемма 3.3.32] по поводу использованного в работе [10] представления элемента $T_{m-1}^m(p^2)$. Непосредственно из определения этих сумм следуют формулы $I(D, Q, \tau(M)) = \chi_Q(\mu)^m \mu^{m/2} \gamma(Q, \mu D^{-1}, \tau(M)) = \mu^{m/2} \gamma(Q, \mu D^{-1}, \tau(M))$, где $\mu = \mu(M)$.)

Из формул (4.10)–(4.12) следует, в частности, что для элементов

$$T = T^m(p), \quad \langle p \rangle_m = T_m^m(p^2) \quad \text{и} \quad T_{m-1}^m(p^2) \quad (4.13)$$

с простыми p , не делящими ступень матрицы Q , коэффициенты $I(D, Q', T)$ как функции от Q' зависят только от класса подобия матрицы Q' , а как функции от D зависят только от двойного класса $\Lambda D \Lambda$. Поэтому, если $\Psi^{n,m}(\tau(M))$ – некоторая линейная комбинация элементов (4.13), то при тех же предположениях формулу (4.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \theta(Z; P_i, Q_i) | \tau(M) &= \mu^{-nk} \sum_{\substack{d_1 | \dots | d_m; \\ d_i d_{m-i+1} = \mu}} I(\text{diag}(d_1, \dots, d_m), Q, \Psi^{n,m}(\tau(M))) \\ &\times \sum_{j=1}^h \theta \left(Z; \sum_{D \in \mathbf{S}_{ij} \cap \Lambda_+ \text{diag}(d_1, \dots, d_m) \Lambda_+ / \mathbf{E}_j} P_i | D, Q_j \right). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что порядки групп $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_h$ равны друг другу, тогда по лемме 2.1 кольцо $\mathcal{H}_r(Q)$ является ручным, и мы можем взять в качестве системы представителей из правых классов по модулю $\mathbf{E}_j$, содержащихся в любом двойном классе $\mathbf{E}_i D' \mathbf{E}_j \subset R^+(Q_i, \mu Q_j)$, подходящую систему представителей из левых классов $\mathbf{E}_i \backslash \mathbf{E}_i D' \mathbf{E}_j$. Это позволяет переписать последнюю формулу в виде

$$\begin{aligned} \theta(Z; P_i, Q_i) | \tau(M) &= \mu^{-nk} \sum_{\substack{d_1 | \dots | d_m; \\ d_i d_{m-i+1} = \mu}} I(\text{diag}(d_1, \dots, d_m), Q, \Psi^{n,m}(\tau(M))) \\ &\times \sum_{j=1}^h \theta \left(Z; \sum_{D \in \mathbf{E}_i \backslash \mathbf{S}_{ij} \cap \Lambda_+ \text{diag}(d_1, \dots, d_m) \Lambda_+} P_i | D, Q_j \right) \\ &= \mu^{-nk} \sum_{\substack{d_1 | \dots | d_m; \\ d_i d_{m-i+1} = \mu}} I(\text{diag}(d_1, \dots, d_m), Q, \Psi^{n,m}(\tau(M))) \\ &\times \sum_{j=1}^h \theta(Z; P_i | \tau_{ij}[d_1, \dots, d_m], Q_j) \end{aligned}$$

(см. (2.28) и (3.16)). Возвращаясь к тета-суммам, при тех же предположениях мы можем представить образ тета-суммы (4.1) под действием оператора $|\tau(M)$

В ВИДЕ

$$\begin{aligned}
\Theta(Z; \mathbf{P}, Q) | \tau(M) &= \theta(Z; P_1, Q_1) | \tau(M) + \cdots + \theta(Z; P_h, Q_h) | \tau(M) \\
&= \mu^{-nk} \sum_{\substack{d_1 | \cdots | d_m; \\ d_i d_{m-i+1} = \mu}} I(\text{diag}(d_1, \dots, d_m), Q, \Psi^{n,m}(M)) \\
&\quad \times \sum_{j=1}^h \theta \left(Z; \sum_{i=1}^h P_i | \tau_{ij}[d_1, \dots, d_m], Q_j \right) \\
&= \mu^{-nk} \sum_{\substack{d_1 | \cdots | d_m; \\ d_i d_{m-i+1} = \mu}} I(\text{diag}(d_1, \dots, d_m), Q, \Psi^{n,m}(\tau(M))) \Theta(Z; \mathbf{P} | \tau[d_1, \dots, d_h], Q)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(см. (2.28) и (3.15)).

Формулы (4.10)–(4.12) определяют, в частности, суммы $I(D, Q, T)$ для всех образующих колец $\mathcal{H}_0^1(q)$ и $\mathcal{H}_0^2(q)$, при условии, что мы можем явно выразить прообразы $\Psi^{n,m}(\tau(M))$ образующих (4.5) для $n = 1, 2$ через элементы (4.13). С этой целью мы сначала рассмотрим действие отображения Жарковской на соответствующие элементы.

ЛЕММА 4.1. *Следующие формулы имеют место для действия отображения Жарковской $\Psi = \Psi_{w,\chi}^{n,n-1}: \mathcal{H}_0^n(q) \mapsto \mathcal{H}_0^{n-1}(q)$ на некоторые из элементов вида (4.5) для $n > 1$ и каждого простого числа p , не делящего q :*

$$\Psi^{n,n-1}(T^n(p)) = (1 + \bar{\chi}(p)p^{n-w})T^{n-1}(p); \tag{4.15}$$

$$\Psi^{n,n-1}(\langle p \rangle_n) = \bar{\chi}(p)p^{-w}\langle p \rangle_{n-1}; \tag{4.16}$$

$$\Psi^{n,n-1}(T_{n-1}^n(p^2)) = \bar{\chi}(p)p^{1-w}T_{n-2}^{n-1}(p^2) + b_n(p)\langle p \rangle_{n-1}, \tag{4.17}$$

где $b_n(p) = b_{n,w,\chi}(p) = \bar{\chi}(p^2)p^{2n-2w} + \bar{\chi}(p)(p-1)p^{-w} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие отображения Жарковской, отвечающего действию операторов Гекке на пространствах $\mathfrak{M}_w^n(q, \chi)$, было вычислено в книге [9; § 4.2.4]. Однако, применяя результаты этих вычислений, необходимо учитывать, что операторы Гекке, определенные в [9; (2.4.11) и (2.4.12)] имеют нормализацию, отличную от той, которую мы используем в настоящей работе, и отличаются от операторов, определенных в работе [6; формулы (1.10) с $l = 0$, (2.13), (2.14) и (2.20) с $Q = H$ и $P = 0$] для однородных элементов мультипликатора μ , множителем $\chi(\mu^n)\mu^{nw-n(n+1)/2}$.

Формула (4.15) следует из результатов книги [9; предложения 4.2.17 и 4.2.18 и формула (4.2.80)] для операторов $|_w \chi(p^n)p^{nw-n(n+1)/2}T^n(p)$ (учтите отмеченное выше различие нормализаций). Формула (4.16) следует по аналогичным причинам из [9; лемма 3.3.34]. Что касается формулы (4.17), то здесь ситуация несколько сложнее. Прежде всего, используя [9; разложение (3.5.69) теорема 3.5.23, формулы (3.5.34), (3.4.15), (3.5.33) и (3.3.61)], мы получаем соотношение

$$T_{n-1}^n(p^2) = -p^n \langle p \rangle_n \mathbf{r}_1^n(p) + (p^n - 1) \langle p \rangle_n, \tag{4.18}$$

где $\mathbf{r}_1^n(p)$ обозначает первый коэффициент p -многочлена Ранкина $R_p^n(v)$, определенного в [9; формулы (3.5.15) и (3.5.16)]. Так как $\mu(\mathbf{r}_1^n(p)) = 1$, то из результатов [9; теорема 4.2.18 и соотношение (4.2.82)] следует соотношение

$$\Psi^{n,n-1}(\mathbf{r}_1^n(p)) = \mathbf{r}_1^{n-1}(p) - \bar{\chi}(p)p^{n-w} - \chi(p)p^{w-n}. \quad (4.19)$$

Поскольку отображение Жарковской является кольцевым гомоморфизмом, формула (4.17) следует легким вычислением из (4.18), (4.16), (4.19). Лемма 4.1 доказана.

Последовательно применяя формулу (4.15) к элементам $T^m(p), \dots, T^n(p)$ с $w = m/2$, $\chi = \chi_Q$ и $n < m$, мы получаем соотношение

$$\Psi^{m,n}(T^m(p)) = \gamma_n^m(p)T^n(p), \quad \text{где} \quad \gamma_n^m(p) = \left\{ \prod_{i=0}^{m-n-1} (1 + \chi_Q(p)p^{m/2-i}) \right\}.$$

Множитель $\gamma_n^m(p)$ равен 0 в том и только том случае, если $m/2 \leq m - n - 1$, т.е. $n \leq m/2 - 1$, и $\chi_Q(p) = -1$. Отсюда следует соотношение

$$\Psi^{n,m}(T^n(p)) = \gamma_n^m(p)^{-1}T^m(p), \quad (4.20)$$

кроме случая, когда $n \leq m/2 - 1$ и $\chi_Q(p) = -1$. Аналогично, используя (4.16), получаем $\Psi^{m,n}(\langle p \rangle_m) = (\chi_Q(p)p^{-m/2})^{m-n} \langle p \rangle_n$, откуда, поскольку значение $\chi_Q(p)$ равно ± 1 , следует соотношение

$$\Psi^{n,m}(\langle p \rangle_n) = \chi_Q(p)^n p^{m(m-n)/2} \langle p \rangle_m. \quad (4.21)$$

По индукции из формул (4.16) и (4.17) легко следует, что для $2 \leq n < m$ выполняются соотношения

$$\Psi^{m,n}(T_{m-1}^m(p^2)) = (ap)^{m-n} T_{n-1}^n(p^2) + a^{m-n-1} \left(\sum_{i=0}^{m-n-1} p^i b_{m-i}(p) \right) \langle p \rangle_n,$$

где $a = \chi_Q(p)p^{-m/2}$. Из этих соотношений и соотношения (4.21) следует, что можно взять

$$\begin{aligned} \Psi^{n,m}(T_{n-1}^n(p^2)) &= \chi_Q(p)^n p^{(m-n)(m-2)/2} T_{m-1}^m(p^2) \\ &\quad - \chi_Q(p)^{n+1} p^{(m^2-mn-m+2n)/2} \left(\sum_{i=0}^{m-n-1} p^i b_{m-i}(p) \right) \langle p \rangle_m \end{aligned}$$

(отметим, что $\chi_Q(p) = \pm 1$ и m четно). Из этих формул, в частности, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Psi^{2,4}(T_1^2(p^2)) &= p^2 T_3^4(p^2) - \chi_Q(p) p^4 (b_4(p) + p b_3(p)) \langle p \rangle_4 \\ &= p^2 T_3^4(p^2) - \chi_Q(p) p^2 (p^6 + p^5 + p^3 + p^2 + \chi_Q(p)(p^2 - 1)) \langle p \rangle_4. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Обратимся теперь к формулам для действия на тета-суммы операторов Гекке, отвечающих коэффициентам спинорных p -многочленов

$$\mathbf{Q}_p^n(t) = \sum_{j=0}^{2^n} (-1)^j \mathbf{q}_j^n(p) t^j$$

над p -подкольцами колец $\mathcal{H}_0^n(q)$ для простых чисел p , не делящих ступень q (см., например, [9; (3.3.78)]). Эти многочлены представляют значительный интерес, поскольку, подставляя $t = \psi(p)p^{-s}$ с подходящим характером Дирихле ψ и заменяя коэффициенты $\mathbf{q}_j^n(p)$ собственными членами $\Lambda(\mathbf{q}_j^n(p))$ соответствующих операторов Гекке, действующих на некоторую собственную функцию $F \in \mathfrak{M}_w^n(q, \chi)$, мы получаем знаменатели

$$\mathbf{Q}_p(\psi(p)p^{-s}, \Lambda) = \sum_{j=0}^{2^n} (-1)^j \Lambda(\mathbf{q}_j^n(p)) p^{-sj}$$

p -множителей регулярной дзета-функции

$$Z_F(s, \psi) = \prod_{p \nmid q} \mathbf{Q}_p(\psi(p)p^{-s}, \Lambda)^{-1} \quad (4.23)$$

с характером ψ , отвечающей выбранной собственной функции. В случае $n = 1$ – это дзета-функция Гекке эллиптической модулярной формы F ; для $n = 2$ указанное произведение определяет дзета-функцию Андрианова собственной функции F рода 2. Отметим, что вопросы диагонализации регулярных операторов Гекке на пространствах зигелевых модулярных форм рассмотрены, например, в книге [9; § 4.1.2]. Диагонализации сингулярных операторов Гекке посвящены, в частности, работы [16]–[20].

Мы ограничимся рассмотрением действия на тета-суммы операторов Гекке, отвечающих коэффициентам $\mathbf{q}_1^n(p)$, $\mathbf{q}_{2^n-1}^n(p)$, $\mathbf{q}_{2^n}^n(p)$ и $\mathbf{q}_2^2(p)$, поскольку этого будет достаточно для вычисления эйлеровых произведений (4.23), отвечающих собственным функциям рода $n = 1$ и 2. Согласно формулам, полученным в [9; (3.3.81), (3.3.79), (3.3.80) и упражнение 3.3.38], в приведенных выше обозначениях эти коэффициенты могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^n(p) &= T^n(p), \\ \mathbf{q}_{2^n-1}^n(p) &= (p^{n(n+1)/2} \langle p \rangle_n)^{2^{n-1}-1} T^n(p), \\ \mathbf{q}_{2^n}^n(p) &= (p^{n(n+1)/2} T_n^n(p^2))^{2^{n-1}} = (p^{n(n+1)/2} \langle p \rangle_n)^{2^{n-1}}, \\ \mathbf{q}_2^2(p) &= pT_1^2(p^2) + p(p^2 + 1) \langle p \rangle_2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Так что, в частности, мы имеем формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^1(t) &= \langle 1 \rangle_1 - T^1(p)t + p \langle p \rangle_1 t^2, \\ \mathbf{Q}_p^2(t) &= \langle 1 \rangle_2 - T^2(p)t + (pT_1^2(p^2) + p(p^2 + 1) \langle p \rangle_2) t^2 \\ &\quad - p^3 \langle p \rangle_2 T^2(p) t^3 + p^6 \langle p \rangle_2^2 t^4. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Отсюда следует, что достаточно рассмотреть действие операторов, отвечающих элементам $T^n(p)$, $\langle p \rangle_n$ и $T_1^2(p^2)$. Согласно (4.14), (4.10), (4.20) и (2.29), мы получаем

$$\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) | T^n(p) = \delta_n^m(p) \Theta(Z; \mathbf{P} | \tau(p), \langle Q \rangle), \quad (4.26)$$

где, исключая случаи, когда $n \leq m/2 - 1$ и $\chi_Q(p) = -1$, коэффициент задается формулами

$$\begin{aligned} \delta_n^m(p) &= p^{-nk+m/2} \gamma_n^m(p)^{-1} \prod_{j=1}^{m/2} (1 + \chi_Q(p)p^{-j}) \\ &= \chi_Q(p)^n p^{-n(k+\frac{m}{2})+\frac{n(n+1)}{2}} \times \begin{cases} \prod_{j=1}^{\frac{m}{2}-n} (1 + \chi_Q(p)p^{j-1})^{-1}, & \text{если } n < m/2 \\ & \text{и } \chi_Q(p) \neq -1, \\ 1, & \text{если } n = m/2, \\ \prod_{j=1}^{n-\frac{m}{2}} (1 + \chi_Q(p)p^{-j}), & \text{если } n > m/2; \end{cases} \end{aligned}$$

далее, согласно соотношениям (4.14), (4.12) и (4.21), мы получаем

$$\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) | \langle p \rangle_n = \chi_Q(p)^n p^{-n(m/2+k)} \Theta(Z; \mathbf{P} | [p]_m, \langle Q \rangle); \quad (4.27)$$

наконец, если $m = 4$, то из соотношений (4.14), (4.11), (4.22) и (4.27) следует формула

$$\begin{aligned} \Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) | T_1^2(p^2) &= \chi_Q(p) p^{-(3+4k)} \theta(Z; \mathbf{P} | \tau[1, p, p, p^2], \langle Q \rangle) \\ &\quad + p^{2-4k} (\alpha_4(p) - \chi_Q(p) p^{-6} (b_4(p) + p b_3(p))) \theta(Z; \mathbf{P} | [p]_4, Q) \\ &= \chi_Q(p) p^{-(3+4k)} \theta(Z; \mathbf{P} | \tau[1, p, p, p^2], \langle Q \rangle) \\ &\quad + p^{-4-4k} (\chi_Q(p) p^2 - 1) \theta(Z; \mathbf{P} | [p]_4, \langle Q \rangle). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Пусть Q – некоторая четная положительно-определенная матрица ступени q и четного порядка $m = 2k$, и пусть $Q_1, \dots, Q_h$ – некоторая система представителей из класса эквивалентности (2.14), содержащихся в классе подобия (2.13) матрицы Q . Предположим, что порядки групп собственных единиц матриц Q_i равны друг другу. Далее, пусть

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_h) \in \mathcal{I}_k^n \langle Q \rangle$$

– некоторый инвариантный гармонический вектор вида (3.11) рода n и веса k относительно системы $Q_1, \dots, Q_h$. Так как, по следствию 2.7, элементы $\tau(p)$ с простыми $p \nmid q$ коммутируют друг с другом и по лемме 2.5 они удовлетворяют соотношениям (2.31), то по предложению 3.5 каждое из инвариантных подпространств пространства $\mathcal{I}_k^n \langle Q \rangle$ имеет базис, состоящий из общих собственных векторов всех операторов $\tau(p)$. Если вектор $\mathbf{P}$ из пространства $\mathcal{I}_k^n \langle Q \rangle$ является собственным вектором с собственными числами $\lambda(\tau(p))$, то на основании формулы (4.26) тета-сумма $\Theta(Z; \mathbf{P}, Q)$ является собственной функцией оператора Гекке $|T(p)$,

$$\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) | T(p) = \Lambda(T(p)) \Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle), \quad (4.29)$$

с собственным числом

$$\Lambda(T(p)) = \delta_n^m(p) \lambda(\tau(p)), \quad (4.30)$$

кроме тех случаев, когда $n \leq m/2 - 1$ и $\chi_Q(p) = -1$.

Теперь мы рассмотрим связи дзета-функций (2.47), отвечающих собственным векторам колец классов автоморфов бинарных и кватернарных квадратичных форм на пространствах гармонических векторов, с дзета-функциями (4.23) тета-сумм, соответствующими этим гармоническим векторам. Отметим, что для матриц Q порядков $m = 2$ или 4 в предположении, что кольцо классов автоморфов $\mathcal{H}\langle Q \rangle$ является ручным, все операторы Гекке, отвечающие коэффициентам локальных дзета-рядов (2.41) для всех простых чисел p , не делящих $\det Q$, могут быть одновременно диагонализированы на каждом инвариантном подпространстве гармонических векторов.

Пусть Q – матрица положительно-определенной бинарной квадратичной формы, пусть род $n = 1$, и пусть $\mathbf{P} \in \mathcal{I}_k^1\langle Q \rangle$ – некоторый собственный вектор всех операторов Гекке $|\tau(p)$ с простыми числами p , не делящими ступень q матрицы Q . По предположению и условию (3.4) для этих простых p имеют место соотношения

$$\mathbf{P}|\tau(p) = \lambda(\tau(p))\mathbf{P} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}|[p] = \mathbf{P}(pX) = p^k\mathbf{P} = \lambda([p])\mathbf{P}.$$

Отсюда следует, что p -множитель (2.46) дзета-функции (2.47), отвечающий вектору $\mathbf{P}$, равен

$$Z_p(p^{-s}, \mathbf{P}) = (1 - \lambda(\tau(p))p^{-s} + \chi_Q(p)\lambda([p])p^{-2s})^{-1}.$$

С другой стороны, согласно соотношениям (4.29) и (4.27), тета-ряд

$$\Theta(z; \mathbf{P}, Q) \in \mathfrak{M}_{1+k}^1(q, \chi_Q)$$

является собственной функцией операторов Гекке $|T(p) = |T^1(p)$ и $|\langle p \rangle = |\langle p \rangle_1$ с собственными числами

$$\Lambda(T(p)) = \delta_1^2(p)\lambda(\tau(p)) = \chi_Q(p)p^{-k}\lambda(\tau(p))$$

и

$$\Lambda(\langle p \rangle) = \chi_Q(p)p^{-(1+k)} = \chi_Q(p)p^{-(1+2k)}\lambda([p])$$

соответственно. Отсюда следует, что для p -множителя дзета-функции (4.23) с характером $\psi = \chi_Q$, отвечающей собственной функции $\Theta(z; \mathbf{P}, Q)$, имеет место тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^1(\chi_Q(p)p^{k-s}, F)^{-1} &= (1 - \Lambda(T(p))\chi_Q(p)p^{k-s} + \Lambda(\langle p \rangle)p(\chi_Q(p)p^{k-s})^2)^{-1} \\ &= (1 - \lambda(\tau(p))p^{-s} + \chi_Q(p)\lambda([p])p^{-2s})^{-1} = Z_p(t, \mathbf{P}). \end{aligned}$$

Из равенства локальных дзета-функций для всех простых p , не делящих ступень матрицы Q , следует равенство соответствующих эйлеровых произведений.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть Q – матрица положительно-определенной бинарной квадратичной формы, q – ступень матрицы Q и χ_Q – соответствующий характер Дирихле по модулю q , и пусть $\mathbf{P} \in \mathcal{I}_k^1\langle Q \rangle$ – гармонический собственный вектор для всех операторов Гекке $|\tau(p)$ с простыми числами $p \nmid q$. Тогда тета-сумма рода 1 класса подобия матрицы Q , отвечающая вектору $\mathbf{P}$,

$$F = \Theta(z; \mathbf{P}, Q) \in \mathfrak{M}_{1+k}^1(q, \chi_Q),$$

является собственной функцией всех операторов Гекке $|T(p) = |T^1(p)$ и соответствующие регулярные дзета-функции (2.47) и (4.23) связаны тождеством

$$Z^*(s, \mathbf{P}) = Z_F(s - k, \chi_Q).$$

Наконец, мы докажем, что аналогичные соотношения имеют место также в случае квадратичных форм от $m = 4$ переменных, гармонических форм рода $n = 2$ и соответствующих тета-рядов.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть Q – матрица положительно-определенной кватер-нарной квадратичной формы, q – степень матрицы Q и χ_Q – соответствующий характер Дирихле по модулю q , и пусть $\mathbf{P} \in \mathcal{I}_k^2\langle Q \rangle$ – гармонический собственный вектор для всех операторов Гекке $|\tau(p)$ и $|\tau[1, p, p, p^2]$ с простыми числами $p \nmid q$. Тогда тета-сумма рода 2 класса подобия матрицы Q , отвечающая вектору $\mathbf{P}$,

$$F = \Theta(Z; \mathbf{P}, Q) \in \mathfrak{M}_{2+k}^2(q, \chi_Q),$$

является собственной функцией всех операторов Гекке вида $|T(p) = |T^2(p)$ и $|T_1^2(p^2)$ с простыми числами $p \nmid q$ и соответствующие регулярные дзета-функции (2.47) и (4.23) связаны тождеством

$$Z^*(s, \mathbf{P}) = Z_F(s - 2k - 1, \chi_1/q),$$

где χ_1/q обозначает единичный характер по модулю q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению, для каждого простого числа p , не делящего степень q , имеют место соотношения

$$\mathbf{P}|\tau(p) = \lambda(\tau(p))\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}|\tau[1, p, p, p^2] = \lambda(\tau[1, p, p, p^2])\mathbf{P}.$$

Используя свойство (3.4), получаем

$$\mathbf{P}|[p]_4 = \mathbf{P}(pX) = p^{2k}\mathbf{P} = \lambda([p]_4)\mathbf{P}.$$

Отсюда, согласно формулам (2.45) и (2.42), следует, что p -множитель (2.46) ортогональной дзета-функции (2.47), отвечающей собственному вектору $\mathbf{P}$, равен

$$\begin{aligned} Z_p(t, \mathbf{P}) &= (1 - \lambda(\tau(p))p^{-s} + (\chi_Q(p)\lambda(\tau[1, p, p, p^2]) + (1 + \chi_Q(p))p\lambda([p]_2))p^{-2s} \\ &\quad - p\lambda([p]_2)\lambda(\tau(p))p^{-3s} + p^2\lambda([p]_2)^2p^{-4s})^{-1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, по формулам (4.29), (4.30), (4.27) и (4.28) соответственно, получаем соотношения

$$\begin{aligned} \Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle)|T^2(p) &= \delta_2^4(p)\lambda(\tau(p))\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) = p^{-2k-1}\lambda(\tau(p))\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle), \\ \Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle)|\langle p \rangle_2 &= \chi_Q(p)^2p^{-2(k+2)}\Theta(Z; \mathbf{P}[p]_4, \langle Q \rangle) \\ &= p^{-4k-4}\lambda([p]_4)\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle)|T_1^2(p^2) &= \chi_Q(p)p^{-(4k+3)}\Theta(Z; \mathbf{P}|\tau[1, p, p, p^2], \langle Q \rangle) \\ &\quad + p^{-4k-4}(\chi_Q(p)p^2 - 1)\Theta(Z; \mathbf{P}[p]_4, \langle Q \rangle) \\ &= (\chi_Q(p)p^{-(4k+3)}\lambda(\tau[1, p, p, p^2]) \\ &\quad + p^{-4k-4}(\chi_Q(p)p^2 - 1)\lambda([p]_4))\Theta(Z; \mathbf{P}, \langle Q \rangle). \end{aligned}$$

Откуда по второй формуле (4.25) мы заключаем, что p -множитель дзета-функции (4.23), соответствующей собственной функции $F = \Theta(Z; \mathbf{P}, Q)$ операторов Гекке $|T$ из кольца $\mathcal{H}_0^2(q)$ с $s - 2k - 1$ вместо s и $\psi = \chi_1/q$, имеет вид

$$\mathbf{Q}_p^2(p^{2k+1-s}, \Lambda)^{-1} = (1 - \Lambda(T^2(p))t + \Lambda(pT_1^2(p^2) + p(p^2 + 1)\langle p \rangle_2)t^2 - \Lambda(p^3\langle p \rangle_2 T^2(p))t^3 + p^6\Lambda(\langle p \rangle_2^2 t^4)^{-1},$$

где $\Lambda(T)$ – соответствующие собственные числа и $t = p^{2k+1-s}$, что можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left(1 - p^{-2k-1}\lambda(\tau(p))t + \left(p(\chi_Q(p)p^{-(4k+3)}\lambda(\tau[1, p, p, p^2]) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + p^{-4k-4}p(\chi_Q(p)p^2 - 1)\lambda([p]_4) + p(p^2 + 1)p^{-4k-4}\lambda([p]_4)\right)t^2 \right. \\ & \quad \left. + p^3p^{-4k-4}\lambda([p]_4)p^{-2k-1}\lambda(\tau(p))t^3 + p^6p^{-8k-8}\lambda([p]_4)^2t^4\right)^{-1} \\ & = \left(1 - \lambda(\tau(p))p^{-s} + (\chi_Q(p)\lambda(\tau[1, p, p, p^2]) + (1 + \chi_Q(p))p\lambda([p]_4))p^{-2s} \right. \\ & \quad \left. - p\lambda([p]_4)\lambda(\tau(p))p^{-3s} + p^2\lambda([p]_4)^2p^{-4s}\right)^{-1} = Z_p(t, \mathbf{P}). \end{aligned}$$

Равенства локальных дзета-функций для всех простых p , не делящих ступень матрицы Q , доказывают равенство эйлеровых произведений.

§ 5. Бинарные формы фундаментальных дискриминантов

В этом параграфе мы докажем, что в случае бинарных квадратичных форм фундаментальных дискриминантов соответствующие глобальные дзета-функции фактически совпадают с дзета-функциями соответствующих квадратичных полей с подходящими характеристиками Гекке. Получающиеся тождества можно рассматривать как естественные расширения тождеств теоремы 4.2 на эйлеровы произведения по всем, а не только регулярным, простым числам.

Пусть

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2c_1 \end{pmatrix}, \dots, Q_h = \begin{pmatrix} 2a_h & b_h \\ b_h & 2c_h \end{pmatrix}$$

– матрицы некоторой системы представителей

$$\mathbf{q}_1(X) = a_1x_1^2 + b_1x_1x_2 + c_1x_2^2, \dots, \mathbf{q}_h(X) = a_hx_1^2 + b_hx_1x_2 + c_hx_2^2 \quad (5.1)$$

из классов собственной эквивалентности целочисленных положительно-определенных бинарных квадратичных форм *делителя* $\delta = \gcd(a_i, b_i, c_i) = 1$ и *дискриминанта* $b_i^2 - 4a_i c_i = -\det Q_i = -d < 0$. Отметим, что в этом случае все матрицы Q_i имеют одинаковую ступень $q = d$.

С другой стороны, рассмотрим мнимое квадратичное поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Пусть $\Delta < 0$ будет дискриминант поля K , тогда $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ и $-d$ имеет вид Δt^2 с $t \in \mathbb{N}$. Для упрощения предстоящих рассмотрений мы будем предполагать, что дискриминант форм (5.1) является *фундаментальным*, т.е. совпадает с дискриминантом поля K , так что $\Delta = -d$.

Если

$$\mathbf{q}_i(X) = a_i(x_1 - \gamma_i x_2)(x_1 - \bar{\gamma}_i x_2), \quad \text{где} \quad \gamma_i = \frac{-b_i + \sqrt{-d}}{2a_i} \in \mathbb{H}_1, \quad (5.2)$$

– стандартное разложение формы $\mathbf{q}_i$, мы будем говорить, что число γ_i является *корнем формы* $\mathbf{q}_i$. Все корни γ_i содержатся в поле K . Мы ассоциируем с каждой из форм $\mathbf{q}_i$ (*полный*) $\mathbb{Z}$ -модуль ранга 2 в поле K вида

$$\mathcal{M}_i = \{1, \gamma_i\} = \{\mathbb{Z} + \gamma_i \mathbb{Z}\}.$$

Норма $N(\mathcal{M}_i)$ модуля $\mathcal{M}_i$ равна $1/a_i$, а его кольцо множителей,

$$\mathcal{O}(\mathcal{M}_i) = \{\alpha \in K \mid \alpha \mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_i\} = \{1, a_i \gamma_i\} = \{\alpha \in K \mid \alpha + \bar{\alpha}, \alpha \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{O},$$

совпадает с кольцом целых чисел поля K . Модули $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_h$ образуют полную систему представителей из классов эквивалентных полных модулей в поле K с кольцом множителей $\mathcal{O}$. По поводу деталей о модулях в квадратичных полях и их связях с бинарными квадратичными формами см., например, [9; приложение 3].

Целочисленная матрица $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $\det D > 0$ является (собственным) автоморфом матрицы Q_i в Q_j с мультипликатором μ в том и только том случае, если $\mathbf{q}_i(DX) = \mu \mathbf{q}_j$, т.е.

$$\begin{aligned} & a_i(ax_1 + bx_2 - \gamma_i(cx_1 + dx_2))(ax_1 + bx_2 - \bar{\gamma}_i(cx_1 + dx_2)) \\ &= a_i((a - \gamma_i c)x_1 - (\gamma_i d - b)x_2)((a - \bar{\gamma}_i c)x_1 - (\bar{\gamma}_i d - b)x_2) \\ &= a_i N(a - \gamma_i c) \left(x_1 - \frac{\gamma_i d - b}{a - \gamma_i c} x_2 \right) \left(x_1 - \frac{\bar{\gamma}_i d - b}{a - \bar{\gamma}_i c} x_2 \right) \\ &= \mu a_j (x_1 - \gamma_j x_2)(x_1 - \bar{\gamma}_j x_2), \end{aligned}$$

где $N(\alpha) = \alpha \bar{\alpha}$ обозначает норму числа $\alpha \in K$. Так как оба числа γ_j и $\frac{\gamma_i d - b}{a - \gamma_i c}$ принадлежат верхней полуплоскости, последнее тождество эквивалентно соотношениям

$$\frac{1}{N(\mathcal{M}_i)} N(a - \gamma_i c) = \frac{\mu}{N(\mathcal{M}_j)} \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_i d - b}{a - \gamma_i c} = \gamma_j. \quad (5.3)$$

Последнее соотношение означает, что второй столбец матрицы D однозначно определяется ее первым столбцом, а первый столбец удовлетворяет условию $(a - \gamma_i c)\gamma_j \in \mathcal{M}_i$, т.е. условию $(a - \gamma_i c)\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_i$, которое можно записать как включение $a - \gamma_i c \in \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}$. Таким образом, целочисленная матрица $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $\det D > 0$ является собственным автоморфом матрицы Q_i в Q_j с мультипликатором μ в том и только том случае, если

$$a - \gamma_i c \in \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1} \quad \text{и} \quad N(a - \gamma_i c) = \mu N(\mathcal{M}_i)/N(\mathcal{M}_j) = \mu N(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}). \quad (5.4)$$

Сопоставим каждому автоморфу

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_{ij}(\mu) = R^+(Q_i, \mu Q_j)$$

число

$$\alpha(D) = \alpha_{ij}(D) = a - \gamma_i c \in \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}. \quad (5.5)$$

Как мы видели выше, отображение $D \mapsto \alpha(D)$ определяет взаимно однозначное соответствие между множеством $A_{ij}(\mu)$ и множеством всех чисел $\alpha \in \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}$ с $N(\alpha) = \mu$. В частности, оно является взаимно однозначным отображением каждой из групп единиц $\mathbf{E}_i = A_{ii}(1)$ на группу единиц $\mathcal{E} = E(\mathcal{O})$ кольца $\mathcal{O}$, откуда

$$\#(\mathbf{E}_1) = \dots = \#(\mathbf{E}_h) = \#(E(\mathcal{O})). \quad (5.6)$$

Если $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_{ij}(\mu)$ и $D' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in A_{jk}(\nu)$, то произведение

$$DD' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

где $a'' = aa' + bc'$ и $c'' = ca' + dc'$, содержится в $A_{ik}(\mu\nu)$ и, используя соотношения (5.3), мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha(DD') &= \alpha_{ik}(DD') = a'' - \gamma_i c'' = aa' + bc' - \gamma_i(ca' + dc') \\ &= (a - \gamma_i c)a' - (\gamma_i d - b)c' = (a - \gamma_i c) \left(a' - \frac{\gamma_i d - b}{a - \gamma_i c} c' \right) = \alpha_{ij}(D) \alpha_{jk}(D'). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отсюда следует, что каждый двойной класс $\mathbf{E}_i D \mathbf{E}_j \subset \mathbf{A}_{ij}$ совпадает с левым классом $\mathbf{E}_i D$, и главные модули (идеалы) $(\alpha(D)) = \alpha(D)\mathcal{O}$ кольца $\mathcal{O}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с этими двойными или левыми классами. Это соответствие, которое мы также будем обозначать буквой α , так что $\alpha(\mathbf{E}_i D \mathbf{E}_j) = \alpha(\mathbf{E}_i D) = \alpha(D)\mathcal{O}$, очевидно, совместимо с умножением двойных классов в кольце классов автоморфов $\mathcal{H} = \mathcal{H}\langle Q \rangle$ и обычным умножением модулей с кольцом множителей $\mathcal{O}$. Кроме того,

$$N(\alpha(D)\mathcal{O}) = N(\alpha(D)) = \mu(D),$$

где N обозначает норму модуля и числа соответственно. Следовательно, $\mathbb{C}$ -линейное расширение α соответствия α на расширенное кольцо Гекке–Шимуры

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(Q_1, \dots, Q_h) = \mathcal{H}(Q_1, \dots, Q_h) \otimes \mathbb{C},$$

где $\otimes$ обозначает тензорное произведение над $\mathbb{Z}$ (расширение кольца скаляров), рассматриваемое над полем $\mathbb{C}$, является изоморфизмом кольца $\tilde{\mathcal{H}}$ на кольцо $\mathbf{M}(\mathcal{O})$ всех матриц порядка h , $\{i, j\}$ -элементы которых являются формальными конечными линейными комбинациями с коэффициентами из $\mathbb{C}$ ненулевых главных модулей $\alpha\mathcal{O}$ с $\alpha \in \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}$ (мы расширяем кольцо скаляров $\mathbb{Z}$ до $\mathbb{C}$, поскольку ниже потребуются использовать комплексные коэффициенты).

Найдем α -образы элементов $\tau(\mu) = (\tau_{ij}(\mu))$ вида (2.29). По определению мы получаем

$$\alpha(\tau(\mu)) = (\alpha_{ij}(\mu)), \quad \text{где} \quad \alpha_{ij}(\mu) = \alpha(\tau_{ij}(\mu)) = \sum_{\substack{(\alpha) \subset \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}, \\ N(\alpha) = \mu N(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1})}} (\alpha). \quad (5.8)$$

Условия $(\alpha) \subset \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}$ и $N(\alpha) = \mu N(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1})$ означают, что главный модуль (α) имеет вид $\mathfrak{A} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}$, где $\mathfrak{A}$ – некоторый *идеал* кольца $\mathcal{O}$ (т.е. полный модуль с кольцом множителей $\mathcal{O}$, содержащийся в $\mathcal{O}$) с нормой $N(\mathfrak{A}) = \mu$ и такой, что модуль $\mathfrak{A} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}$ является главным. Таким образом,

$$\alpha_{ij}(\mu) = \sum_{\substack{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu \\ \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1} \mathfrak{A} \sim \mathcal{O}}} \mathfrak{A} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}.$$

Обозначим через $\text{Cl}(K)$ группу классов эквивалентных полных модулей поля K , т.е. факторгруппу мультипликативной группы всех полных модулей по подгруппе главных модулей, и пусть $\widehat{\text{Cl}}(K)$ обозначает группу характеров группы $\text{Cl}(K)$. По соотношениям ортогональности для характеров мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \left(\sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu} \chi(\mathfrak{A}) \mathfrak{A} \right) \chi(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}) \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1} \\ = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu} \frac{1}{h} \left(\sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \chi(\mathfrak{A} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}) \right) \mathfrak{A} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1} = \alpha_{ij}(\mu). \end{aligned}$$

Поэтому мы можем переписать всю матрицу $\alpha(\tau(\mu))$ в виде

$$\alpha(\tau(\mu)) = \sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \left(\sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu} \chi(\mathfrak{A}) \mathfrak{A} \right) I(\chi), \quad (5.9)$$

где

$$I(\chi) = \frac{1}{h} (\chi(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}) \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}) \subset \mathbf{M}(\mathcal{O}). \quad (5.10)$$

Сумма этих матриц

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} I(\chi) &= \frac{1}{h} \left(\sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \chi(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}) \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1} \right) \\ &= \text{diag}(\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}) = \mathbf{1}_{\mathbf{M}(\mathcal{O})} = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

является единичным элементом кольца $\mathbf{M}(\mathcal{O})$. Кроме того, эти матрицы удовлетворяют идемпотентным соотношениям

$$I(\chi)I(\chi') = \begin{cases} I(\chi), & \text{если } \chi = \chi', \\ \mathbf{0}, & \text{если } \chi \neq \chi'. \end{cases} \quad (5.12)$$

Действительно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} I(\chi)I(\chi') &= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{l=1}^h \chi(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_l^{-1}) \mathcal{M}_i \mathcal{M}_l^{-1} \chi(\mathcal{M}_l \mathcal{M}_j^{-1}) \mathcal{M}_l \mathcal{M}_j^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\chi(\mathcal{M}_i) \chi'(\mathcal{M}_j^{-1}) \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1} \sum_l \chi(\mathcal{M}_l^{-1}) \chi'(\mathcal{M}_l) \right), \end{aligned}$$

и соотношения (5.12) следуют из формул

$$\sum_l \chi(\mathcal{M}_l^{-1}) \chi'(\mathcal{M}_l) = \sum_l (\chi' \chi^{-1})(\mathcal{M}_l) = \begin{cases} h, & \text{если } \chi = \chi', \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi'. \end{cases}$$

Сопоставим теперь каждому ненулевому идеалу $\mathfrak{A}$ кольца $\mathcal{O}$ матрицу $\{\mathfrak{A}\} \in \mathbf{M}(\mathcal{O})$ вида

$$\{\mathfrak{A}\} = \sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \chi(\mathfrak{A}) \mathfrak{A} I(\chi) = \mathfrak{A} \sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \chi(\mathfrak{A}) I(\chi). \quad (5.13)$$

В частности, по формуле (5.11) мы получаем, что матрица

$$\{\mathcal{O}\} = \sum_{\chi \in \widehat{\text{Cl}}(K)} \mathcal{O} I(\chi) = \mathcal{O} \cdot 1_{\mathbf{M}(\mathcal{O})} = \mathbf{1} \quad (5.14)$$

является единичным элементом кольца $\mathbf{M}(\mathcal{O})$. Из формул (5.12) следуют соотношения

$$\{\mathfrak{A}\} \{\mathfrak{B}\} = \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{A}) \mathfrak{A} I(\chi) \sum_{\chi'} \chi'(\mathfrak{B}) \mathfrak{B} I(\chi') = \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{A} \mathfrak{B} I(\chi) = \{\mathfrak{A} \mathfrak{B}\}. \quad (5.15)$$

Используя обозначения (5.13), мы можем переписать формулу (5.9) в виде

$$\alpha(\tau(\mu)) = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu} \{\mathfrak{A}\}. \quad (5.16)$$

Приведенные формулы позволяют записать α -образ формального ряда Дирихле (2.38) в терминах идеалов кольца $\mathcal{O}$:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tau(\mu)}{\mu^s} \Rightarrow \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\tau(\mu))}{\mu^s} = \sum_{\mathfrak{A}} \frac{\{\mathfrak{A}\}}{N(\mathfrak{A})^s},$$

где $\mathfrak{A}$ пробегает все ненулевые идеалы кольца $\mathcal{O}$. Это позволяет нам использовать мультипликативную теорию идеалов кольца $\mathcal{O}$ для “эйлерова разложения” указанных рядов. Используя формулу (5.14), мы можем записать рассматриваемый ряд в виде

$$\prod_{\mathfrak{P}} \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{\{\mathfrak{A}\}^{\delta}}{N(\mathfrak{P})^{\delta s}} = \prod_{\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{\{\mathfrak{P}\}}{N(\mathfrak{P})^s} \right)^{-1} = \prod_p \prod_{\mathfrak{P}|p} \left(1 - \frac{\{\mathfrak{P}\}}{N(\mathfrak{P})^s} \right)^{-1}, \quad (5.17)$$

где $\mathfrak{P}$ пробегает все простые идеалы кольца $\mathcal{O}$, p пробегает все рациональные простые числа, а в последнем произведении $\mathfrak{P}$ пробегает все простые идеалы, делящие идеал $(p) = p\mathcal{O}$.

Применим хорошо известные законы разложения простых чисел на простые идеалы кольца $\mathcal{O}$ (см., например, [21; гл. 3, § 8, теорема 2]). Пусть χ_K обозначает характер Дирихле, ассоциированный с полем K , и пусть p – рациональное простое число. Тогда в случае $\chi_K(p) = 1$ существуют ровно два сопряженных простых идеала $\mathfrak{P}$ и $\bar{\mathfrak{P}}$ кольца $\mathcal{O}$, делящих число p , эти идеалы удовлетворяют соотношениям $\mathfrak{P}\bar{\mathfrak{P}} = p\mathcal{O}$ и $N(\mathfrak{P}) = N(\bar{\mathfrak{P}}) = p$, так что, на

основании формул (5.15) и (5.16) соответственно, мы получаем соотношения $\{\mathfrak{P}\}\{\overline{\mathfrak{P}}\} = p\{\mathcal{O}\} = p\mathbf{1} = p\alpha(\tau(1))$ и $\{\mathfrak{P}\} + \{\overline{\mathfrak{P}}\} = \alpha(p)$; если $\chi_K(p) = -1$, то существует единственный простой идеал $\mathfrak{P}$, делящий число p , этот идеал удовлетворяет условиям $\mathfrak{P} = p\mathcal{O}$ и $N(\mathfrak{P}) = p^2$, так что $\{\mathfrak{P}\} = \{p\mathcal{O}\} = \alpha([p])$ и $\alpha(\tau(p)) = 0$; если же $\chi_K(p) = 0$, то существует единственный простой идеал $\mathfrak{P}$, делящий число p , и этот идеал удовлетворяет условиям $\mathfrak{P}^2 = p\mathcal{O}$ и $N(\mathfrak{P}) = p$, так что $\{\mathfrak{P}\} = \alpha(p)$. Отметим, что в рассматриваемой ситуации характер χ_K равен характеру χ_Q квадратичной формы с матрицей Q , эквивалентной любой из матриц Q_i . Поэтому эйлерово произведение может быть переписано в виде

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\tau(\mu))}{\mu^s} = \prod_{p \text{ простые}} \left(\alpha([1]) - \frac{\alpha(\tau(p))}{p^s} + \frac{\chi_K(p)\alpha([p])}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

Возвращаясь к прообразу отображения α , мы получаем разложение

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tau(\mu)}{\mu^s} = \prod_{p \text{ простые}} \left([1] - \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{\chi_K(p)[p]}{p^{2s}} \right)^{-1}, \quad (5.18)$$

уточняющее разложение (2.38).

Рассмотрим теперь линейное расширение представления (3.15) до линейного представления кольца $\mathcal{H}$ на инвариантном подпространстве

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k^1(Q_1, \dots, Q_h) = \{(P_1, \dots, P_h) \in \mathcal{P}_k \mid P_i \in \mathcal{I}_k(Q_i)\}$$

пространства $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^1(Q_1, \dots, Q_h)$ гармонических векторов рода 1 и веса k (равного степени) относительно системы $Q_1, \dots, Q_h$, где $\mathcal{I}_k(Q_i) = \mathcal{I}_k^1(Q_i)$ обозначает пространство вида (3.13) всех $\mathbf{E}_i$ -инвариантных гармонических форм. Из предложения 3.1 легко следует, что пространство $\mathcal{P}_k^1(Q_i)$ всех гармонических форм рода 1 и степени k относительно матрицы Q_i состоит из линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{C}$ многочленов

$$P_i^k(X) = (x_1 - \gamma_i x_2)^k \quad \text{и} \quad P_{-i}^k(X) = (x_1 - \overline{\gamma}_i x_2)^k \quad \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right), \quad (5.19)$$

где γ_i определено в (5.2). Используя равенства (5.6), легко проверить, что эти многочлены являются $\mathbf{E}_i$ -инвариантными в том и только том случае, если степень k делится на порядок $e = e(\mathcal{O}) = \#(E(\mathcal{O}))$ группы единиц кольца $\mathcal{O}$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. В этом случае пространство $\mathcal{I}_k$ совпадает с пространством $\mathcal{P}_k$ всех гармонических векторов и $2h$ векторов

$$\mathbf{P}_{\pm i} = \mathbf{P}_{\pm i}^{(k)} = (0, \dots, 0, P_{\pm i}^k, 0, \dots, 0) \quad \text{с} \quad \pm i = \pm 1, \dots, \pm h \quad (5.20)$$

образуют базис этого пространства.

Образ формы $P \in \mathcal{I}_k(Q_i)$ под действием (3.16) оператора Гекке $|\tau_{ij}(D)$ с $D \in A_{ij}(\mu)$ можно записать в виде

$$P|\tau_{ij}(D) = \sum_{D' \in \mathbf{E}_i \setminus \mathbf{E}_i D \mathbf{E}_j} P(D'X) = P(DX),$$

поскольку $\mathbf{E}_i D \mathbf{E}_j = \mathbf{E}_i D$. Если $P = P_i^k$ и $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то, согласно (5.3) и (5.5), мы получаем

$$\begin{aligned} P_i^k | \tau_{ij}(D) &= P_i^k(DX) = (ax_1 + bx_2 - \gamma_i(cx_1 + bx_2))^k \\ &= (a - \gamma_i c)^k \left(x_1 - \frac{\gamma_i d - b}{a - \gamma_i c} x_2 \right)^k \\ &= (a - \gamma_i c)^k (x_1 - \gamma_j x_2)^k = \alpha_{ij}(D)^k P_j^k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что подпространство $\mathcal{P}_k^+ = \mathcal{I}_k^+$ пространства $\mathcal{P}_k$, натянутое на векторы $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_h$, инвариантно относительно всех операторов Гекке из кольца $\mathcal{H}$. В частности, используя (2.29), аналогично формуле (5.8) мы получаем для $i = 1, \dots, h$ и $\mu = 1, 2, \dots$ формулу

$$\mathbf{P}_i | \tau(\mu) = \sum_{j=1}^h \alpha_{ij}^{(k)}(\mu) \mathbf{P}_j, \quad \text{где} \quad \alpha_{ij}^{(k)}(\mu) = \sum_{\substack{(\alpha) \subset \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1}, \\ N(\alpha) = \mu N(\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^{-1})}} \alpha^k. \quad (5.21)$$

Кроме того, по формуле (3.4) для операторов Гекке, отвечающих элементам (2.30), получаем соотношение

$$\mathbf{P}_i | [d] = d^k \mathbf{P}_i \quad (i = 1, \dots, h). \quad (5.22)$$

Аналогично получаем формулы

$$P_{-i}^k | \tau(D) = P_{-i}^k(DX) = (a - \bar{\gamma}_i c)^k (x_1 - \bar{\gamma}_j x_2)^k = \bar{\alpha}_{ij}^k(D) \bar{P}_{-j}^k,$$

откуда следует, что подпространство $\mathcal{P}_k^- = \mathcal{I}_k^-$ пространства $\mathcal{P}_k$, натянутое на векторы $\mathbf{P}_{-1}, \dots, \mathbf{P}_{-h}$, инвариантно относительно всех операторов Гекке из кольца $\mathcal{H}$. В частности, для $i = 1, \dots, h$ и $\mu = 1, 2, \dots$ мы получаем формулы

$$\mathbf{P}_{-i} | \tau(\mu) = \sum_{j=1}^h \bar{\alpha}_{ij}^{(k)} \mathbf{P}_{-j},$$

где

$$\bar{\alpha}_{ij}^{(k)}(\mu) = \sum_{\substack{(\alpha) \subset \overline{\mathcal{M}_i} (\overline{\mathcal{M}_j})^{-1}, \\ N(\alpha) = \mu N(\overline{\mathcal{M}_i} (\overline{\mathcal{M}_j})^{-1})}} \alpha^k = \sum_{\substack{(\alpha) \subset \overline{\mathcal{M}_i} \overline{\mathcal{M}_j}^{-1}, \\ N(\alpha) = \mu N(\overline{\mathcal{M}_i} \overline{\mathcal{M}_j}^{-1})}} \bar{\alpha}^k.$$

Таким образом, можно ограничиться рассмотрением операторов Гекке на пространстве $\mathcal{P}_k^+$. С этой целью мы введем линейное представление о полугруппы всех ненулевых идеалов кольца $\mathcal{O}$ на пространстве $\mathcal{P}_k^+$, полагая

$$\mathbf{P}_i \circ \mathfrak{A} = \alpha_{ij}(\mathfrak{A})^k \mathbf{P}_j, \quad \text{если} \quad \mathfrak{A} \mathcal{M}_i \sim \mathcal{M}_j \Leftrightarrow \mathfrak{A} \mathcal{M}_i = \alpha_{ij}(\mathfrak{A}) \mathcal{M}_j \text{ с } \alpha_{ij}(\mathfrak{A}) \in K.$$

Обозначим через $M(\mathfrak{A}) = (\alpha_{ij}(\mathfrak{A})^k)$ матрицу оператора $\circ \mathfrak{A}$, записанную в базисе $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_h$. Тогда, очевидно, имеют место соотношения

$$M(\mathfrak{A})M(\mathfrak{B}) = M(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \quad \text{и} \quad M((\alpha)) = \alpha^k \cdot 1_h, \quad \text{если} \quad \alpha \in \mathcal{O}, \quad (5.23)$$

и матрица (5.21) оператора Гекке $|\tau(\mu)$ может быть записана в том же базисе в виде

$$(\alpha_{ij}^{(k)}(\mu)) = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu} M(\mathfrak{A}). \quad (5.24)$$

Если $\mathfrak{A}\mathcal{M}_i = \alpha_{ij}(\mathfrak{A})\mathcal{M}_j$, то, переходя к сопряженным модулям, мы получаем соотношение $\overline{\mathfrak{A}\mathcal{M}_i} = \overline{\alpha_{ij}(\mathfrak{A})\mathcal{M}_j}$. Так как для каждого полного модуля $\mathcal{M}$ с кольцом множителей $\mathcal{O}$ имеет место соотношение $\mathcal{M}\overline{\mathcal{M}} = N(\mathcal{M})\mathcal{O}$, где $N(\mathcal{M})$ – норма модуля $\mathcal{M}$, то из последнего соотношения следует, что $\overline{\mathfrak{A}N(\mathcal{M}_i)\mathcal{M}_i^{-1}} = \overline{\alpha_{ij}(\mathfrak{A})N(\mathcal{M}_j)\mathcal{M}_j^{-1}}$, или $\overline{\mathfrak{A}\mathcal{M}_j} = N(\mathcal{M}_i)^{-1}\overline{\alpha_{ij}(\mathfrak{A})N(\mathcal{M}_j)\mathcal{M}_i}$, откуда по определению матриц $\overline{M}$ имеет место соотношение

$$M(\overline{\mathfrak{A}}) = N^{-2} {}^t\overline{M}(\mathfrak{A})N^2, \quad \text{где } N = \text{diag}(\sqrt{N(\mathcal{M}_1)}, \dots, \sqrt{N(\mathcal{M}_h)}).$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$M'(\overline{\mathfrak{A}}) = NM(\overline{\mathfrak{A}})N^{-1} = N^{-1} {}^t\overline{M}(\mathfrak{A})N = {}^t(N\overline{M}(\mathfrak{A})N^{-1}) = {}^t\overline{M}'(\mathfrak{A}). \quad (5.25)$$

С другой стороны, на основании (5.23), матрицы $M'(\mathfrak{A})$ вместе с матрицами $M(\mathfrak{A})$ коммутируют друг с другом и, в частности, коммутируют с матрицей $M'(\overline{\mathfrak{A}})$. Таким образом, каждая из матриц $M'(\mathfrak{A}) = NM(\mathfrak{A})N^{-1}$ является нормальной и по хорошо известной теореме линейной алгебры все матрицы $M'(\mathfrak{A})$ могут быть одновременно диагонализированы. Отсюда следует, что существует базис пространства $\mathcal{P}_k^+$, состоящий из общих собственных векторов всех операторов $\circ\mathfrak{A}$. Пусть $\mathbf{F} = a_h\mathbf{P}_1 + \dots + a_h\mathbf{P}_h$ – один из таких собственных векторов, так что

$$\mathbf{F} \circ \mathfrak{A} = \rho(\mathfrak{A})\mathbf{F} \quad \text{для всех идеалов } \mathfrak{A} \subset \mathcal{O}.$$

Так как любой идеал $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}$ в степени h является главным идеалом, $\mathfrak{A}^h = \alpha\mathcal{O}$ с $\alpha \in \mathcal{O}$, то по (5.23) мы заключаем, что

$$\rho(\mathfrak{A})^h = \rho(\mathfrak{A}^h) = \rho(\alpha\mathcal{O}) = \alpha^k = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^k |\alpha|^k = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^k N(\mathfrak{A})^{kh/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(\mathfrak{A}) = \Psi_k(\mathfrak{A})N(\mathfrak{A})^{k/2} \quad \text{с характером Гекке } \Psi_k(\mathfrak{A}) = \left(\sqrt[h]{\frac{\alpha}{|\alpha|}}\right)^k.$$

Согласно формулам (5.21) и (5.24), собственные числа операторов Гекке $|\tau(\mu)$ на пространстве $\mathcal{P}_k^+$, отвечающие собственному вектору $\mathbf{F}$, можно записать в виде

$$\rho(\tau(\mu)) = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}, N(\mathfrak{A})=\mu} \rho(\mathfrak{A}),$$

и соответствующая дзета-функция равна

$$\begin{aligned} Z(s, \mathbf{F}) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\rho(\tau(\mu))}{\mu^s} = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}} \frac{\rho(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^s} = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}} \frac{\Psi_k(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^{s-k/2}} \\ &= \prod_{\text{простые идеалы } \mathfrak{P} \subset \mathcal{O}} \left([1] - \frac{\Psi_k(\mathfrak{P})}{N(\mathfrak{P})^{s-k/2}} \right)^{-1} = \zeta_{\mathcal{O}}(s - k/2, \Psi_k), \end{aligned}$$

где

$$\zeta_{\mathcal{O}}(s, \Psi_k) = \sum_{\mathfrak{A}} \frac{\Psi_k(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^s} = \prod_{\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{\Psi_k(\mathfrak{P})}{N(\mathfrak{P})^s}\right)^{-1}$$

с $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{P}$, пробегающими все ненулевые идеалы и все простые идеалы кольца $\mathcal{O}$ соответственно, является дзета-функцией Гекке кольца $\mathcal{O}$ с характером Ψ_k . Отсюда следует, что ряд Дирихле $Z(s, \mathbf{F})$ сходится абсолютно и равномерно в каждой правой полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 + k/2 + \varepsilon$ с положительным ε . Функция $Z(s, \mathbf{F})$ снова может быть представлена в каждой области абсолютной сходимости посредством интеграла Меллина от тета-суммы вида $\Theta(z; \mathbf{F}, Q) = a_1 \theta(z; P_1, Q_1) + \dots + a_h \theta(z; P_h, Q_h)$ для некоторой матрицы Q , эквивалентной одной из матриц Q_i :

$$r(2; \mathbf{F})Z(s, \mathbf{F}) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (\Theta(\sqrt{-1}t; \mathbf{F}, Q) - \mathbf{F}(0))t^{s-1} dt,$$

где $r(2; \mathbf{F})$ и $\mathbf{F}(0)$ обозначают коэффициент при $e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ и постоянный член разложения Фурье тета-суммы соответственно и где $\Gamma(s)$ – гамма-функция. Это представление позволяет доказать, что дзета-функция имеет мероморфное аналитическое продолжение на всю s -плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению. Альтернативно, аналитические свойства дзета-функции $\zeta_{\mathcal{O}}(s, \Psi_k)$ можно исследовать, используя анализ Фурье на пространстве аделей поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, как это было сделано в диссертации Тэйта [22].

Список литературы

- [1] А. Н. Андрианов, “О дзета-функциях ортогональных групп одноклассных положительно-определенных квадратичных форм”, *Алгебра и анализ*, **17**:4 (2005), 3–41.
- [2] S. Rallis, “Langlands’ functoriality and Weil representation”, *Amer. J. Math.*, **104**:3 (1982), 469–515.
- [3] А. Н. Андрианов, “Квадратичные сравнения и рациональность локальных дзета-рядов тернарных и кватернарных квадратичных форм”, *Алгебра и анализ*, **6**:2 (1994), 3–52.
- [4] А. Н. Андрианов, “Композиция решений квадратичных диофантовых уравнений”, *УМН*, **46**:2 (1991), 3–40.
- [5] A. N. Andrianov, *Queen’s lectures on arithmetical composition of quadratic forms*, Queen’s Papers in Pure and Appl. Math., **92**, Queen’s Univ., Kingston, ON, 1992.
- [6] А. Н. Андрианов, “Гармонические тета-функции и операторы Гекке”, *Алгебра и анализ*, **8**:5 (1996), 1–31.
- [7] А. Н. Андрианов, “Мультипликативные свойства решений квадратичных диофантовых задач”, *Алгебра и анализ*, **2**:1 (1990), 3–46.
- [8] J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, London Math. Soc. Monogr., **13**, Academic Press, London, 1978.
- [9] A. N. Andrianov, *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren Math. Wiss., **286**, Berlin, Springer-Verlag, 1987.
- [10] А. Н. Андрианов, “Мультипликативные разложения целочисленных представлений бинарных квадратичных форм”, *Алгебра и анализ*, **5**:1 (1993), 81–108.
- [11] M. Kashiwara, M. Vergne, “On the Segal–Shale–Weil representations and harmonic polynomials”, *Invent. Math.*, **44**:1 (1978), 1–47.

- [12] E. Freitag, *Singular modular forms and theta relations*, Lecture Notes in Math., **1487**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [13] A. Ogg, *Modular forms and Dirichlet series*, W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [14] А. Н. Андрианов, Г. Н. Малолеткин, “Поведение тета-рядов рода n при модулярных подстановках”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:2 (1975), 243–258.
- [15] А. Н. Андрианов, “Симметрии гармонических тета-функций целочисленных квадратичных форм”, *УМН*, **50**:4 (1995), 3–44.
- [16] А. Н. Андрианов, “Сингулярные кольца Гекке–Шимуры и операторы Гекке на зигелевых модулярных формах”, *Алгебра и анализ*, **11**:6 (1999), 1–68.
- [17] А. Н. Андрианов, А. А. Панчишкин, “Сингулярные операторы Фробениуса на зигелевых модулярных формах с характеристиками и дзета-функции”, *Алгебра и анализ*, **12**:2 (2000), 64–99.
- [18] A. N. Andrianov, “On diagonalisation of singular Frobenius operators on Siegel modular forms”, *Amer. J. Math.*, **125**:1 (2003), 139–165.
- [19] A. O. L. Atkin, J. Lehner, “Hecke operators on $\Gamma_0(m)$ ”, *Math. Ann.*, **185**:2 (1970), 134–160.
- [20] W.-C. W. Li, “Newforms and functional equations”, *Math. Ann.*, **212**:4 (1975), 285–315.
- [21] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1964.
- [22] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta functions*, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., Princeton, NJ, 1950.

А. Н. Андрианов (A. N. Andrianov)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: anandr@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

06.05.2006