Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Болдин, О последовательных остаточных эмпирических процессах в ARCH-модели, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 2, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:00:53

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТОЧНЫХ
ЭМПИРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ В ARCH-МОДЕЛИ

М. В. Болдин

1. Постановка задачи и формулировка результата. Пусть при гипотезе H_0 наблюдения $u_1, \dots, u_n$ порождаются ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedastic) моделью порядка p , которая определяется соотношениями

$$u_i = \sigma_i \varepsilon_i, \quad \sigma_i^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{i-j}^2, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

В (1) $\alpha_s > 0$ для $s = 0, 1, \dots, p$, $\sum_{j=1}^p \alpha_j < 1$; $\{\varepsilon_i\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.сл.в.) с функцией распределения (ф.р.) G и лебеговой плотностью g , $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$. Вектор $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)^T$ предполагается неизвестным, T – знак транспонирования. Начальные значения $u_{1-p}, \dots, u_0$ возьмем нулевыми, их выбор не влияет на наши асимптотические результаты. Альтернативой к H_0 возьмем следующую гипотезу H_1 : наблюдения $u_1, \dots, u_n$ порождаются моделью (1), в которой н.о.р.сл.в. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{[n\nu]}$ имеют ф.р. G_1 , а н.о.р.сл.в. $\varepsilon_{[n\nu]+1}, \dots, \varepsilon_n$ имеют ф.р. G_2 , причем $G_1 \neq G_2$; G_1, G_2 и константа ν , $0 < \nu < 1$, неизвестны. Прочие предположения остаются теми же, что при H_0 .

Цель настоящей заметки – построить тест типа Колмогорова для проверки H_0 против H_1 и прокомментировать результат.

Обозначим $\mathbf{u}_{i-1} = (u_{i-1}, \dots, u_{i-p})$ и переобозначим σ_i^2 из (1) через $\sigma_i^2(\mathbf{u}_{i-1}, \alpha)$. Пусть $\hat{\alpha}_n$ – любая $n^{1/2}$ -состоятельная при H_0 оценка α . Положим для $i = 1, \dots, n$

$$\hat{\varepsilon}_i := \begin{cases} u_i \sigma_i^{-1}(\mathbf{u}_{i-1}, \hat{\alpha}_n), & \sigma_i^2(\mathbf{u}_{i-1}, \hat{\alpha}_n) > 0, \\ 0, & \sigma_i^2(\mathbf{u}_{i-1}, \hat{\alpha}_n) \leq 0. \end{cases}$$

Величины $\hat{\varepsilon}_i$ суть остатки в модели (1). Пусть $\hat{G}_{nt}(x)$, $\hat{G}_{n,1-t}(x)$, $t \in [0, 1]$, будут эмпирическими функциями распределения, построенными по величинам $\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_{[nt]}$ и $\hat{\varepsilon}_{[nt]+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_n$ соответственно. Статистика типа Колмогорова для проверки H_0 имеет вид

$$\hat{D}_n := \sup_{x,t} |\hat{B}_n(x, t)|,$$

где $\widehat{B}_n(x, t) = ([nt]/n)(1 - [nt]/n)n^{1/2}[\widehat{G}_{nt}(x) - \widehat{G}_{n, 1-t}(x)]$. Обозначим $\mathbb{D}_2$ метрическое пространство функций на квадрате $[0, 1]^2$ с метрикой, порождающей топологию Скорохода, см. [1]. Обозначим $B(s, t)$ непрерывный гауссовский процесс с нулевым средним и

$$\text{cov}\{B(s_1, t_1), B(s_2, t_2)\} = (s_1 \wedge s_2 - s_1 s_2)(t_1 \wedge t_2 - t_1 t_2).$$

Если $B_n(x, t)$ определяется аналогично $\widehat{B}_n(x, t)$ по н.о.р.сл.в. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ с непрерывной ф.р. G , то $B_n(G^{-1}(s), t)$ слабо сходится в $\mathbb{D}_2$ к $B(s, t)$.

Наш основной результат – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H_0 верна. Пусть $g(x) > 0$ н.н.,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} xg(x) = 0, \quad \sup_x (1 + x^2)|g'(x)| < \infty.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x, t} |\widehat{B}_n(x, t) - B_n(x, t)| = o_P(1)$$

и, следовательно, процесс $\widehat{B}_n(G^{-1}(s), t)$ слабо сходится в $\mathbb{D}_2$ к $B(s, t)$.

В силу теоремы 1 при H_0 $\widehat{D}_n$ сходится по распределению к $\sup_{s, t} |B(s, t)|$. Ф.р. последней величины табулирована в [2], а потому $\widehat{D}_n$ можно взять тестовой статистикой асимптотически свободного теста для проверки H_0 . При этом H_0 следует отвергать, когда $\widehat{D}_n$ велико.

2. Комментарий. Обозначим $\widehat{K}_n(x, t) := n^{-1/2} \sum_{i \leq [nt]} [I(\widehat{\varepsilon}_i \leq x) - G(x)]$ последовательный остаточный эмпирический процес. Это аналог “истинного” последовательного эмпирического процесса $K_n(x, t)$, получающегося заменой в $\widehat{K}_n(x, t)$ остатков $\widehat{\varepsilon}_i$ на ε_i . При H_0 $\widehat{B}_n(x, t) = \widehat{K}_n(x, t) - n^{-1}[nt]\widehat{K}_n(x, 1)$, и $B_n(x, t)$ выражается аналогично через $K_n(x, t)$. Поэтому утверждение теоремы 1 прямо следует из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть

$$e(u^0, \alpha) := (\sigma_i^{-2}(u^0, \alpha), (u_p^0)^2 \sigma_i^{-2}(u^0, \alpha), \dots, (u_1^0)^2 \sigma_i^{-2}(u^0, \alpha))^T,$$

$u^0 := (u_p^0, \dots, u_1^0)$, $\{u_i^0\}$ – стационарный предел для $\{u_i\}$ из (1). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x, t} \left| \widehat{K}_n(x, t) - K_n(x, t) - \frac{1}{2} xg(x) t n^{1/2} (\widehat{\alpha}_n - \alpha)^T E e(u^0, \alpha) \right| = o_P(1). \quad (2)$$

Разложения типа (2) остаточных последовательных эмпирических процессов в некоторых моделях временных рядов уже появлялись в литературе: в [3] – для стационарной ARMA-модели, в [4] – для нестационарной авторегрессии, в [5] – для нелинейных моделей с аддитивными “шумами”. Наше доказательство теоремы 2 основано на подходе работы [6].

ARCH-модель является базовой для обширного семейства родственных гетероскедастических моделей, используемых в эконометрике, см. [7]. Утверждения типа теорем 1 и 2 типичны для таких моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. J. Bickel, M. J. Wichura // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. P. 1656–1670. [2] D. Picard // Adv. Appl. Probab. 1985. V. 17. P. 841–867. [3] J. Bai // Ann. Statist. 1994. V. 22. P. 2051–2061. [4] S. Ling // Ann. Statist. 1998. V. 26. P. 741–754. [5] H. L. Koul // Ann. Statist. 1996. V. 24. P. 380–404. [6] M. V. Boldin // Math. Methods Statist. 2000. V. 9. P. 65–89. [7] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.