Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Анзин, О плотности решетчатого покрытия для $n = 11$ и $n = 14$, УМН, 2002, том 57, выпуск 2, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 05:54:28

О ПЛОТНОСТИ РЕШЕТЧАТОГО ПОКРЫТИЯ ДЛЯ $n = 11$ И $n = 14$

М. М. Анзин

1. Основной результат и история вопроса. Задача о наименее плотных решетчатых покрытиях (обзор см. в [1]) состоит в отыскании для каждой размерности n такой решетки Γ_n , которая дает наименьшее значение плотности $\theta_n(\Gamma)$ решетчатого покрытия евклидова пространства E^n .

В настоящей работе мы сводим исследование функции $\theta_n(\Gamma)$ к исследованию функции $\eta(\Gamma)$ – аналога функции Эрмита

$$\eta(\Gamma) = \eta(f_\Gamma) = D^2 / \sqrt[n]{\det f_\Gamma} = (2R)^2 / \sqrt[n]{\det f_\Gamma},$$

где $D = D(\Gamma) = 2R$ – диаметр шара покрытия, $\det f_\Gamma$ – определитель матрицы положительной квадратичной формы f_Γ , отвечающей некоторому основному реперу решетки Γ . Если Ω_n – объем n -мерного шара единичного радиуса, то $\eta(\Gamma) = 4(\theta_n(\Gamma)/\Omega_n)^{2/n}$.

К настоящему времени задача о наименее плотных решетчатых покрытиях полностью решена только для размерностей $n = 2, 3, 4, 5$ (подробности см. в [1]). Для других n известны только оценки. Во всех перечисленных случаях решение достигается на решетках A_n^* , которым отвечают квадратичные формы из серии “главной формы первого типа Вороного”

$$\sum_{i=1}^n nx_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n x_i x_j, \quad \text{для которых} \quad \eta(A_n^*) = \frac{n(n+2)}{3n+3} \sqrt[n]{n+1}.$$

Существует гипотеза, что решетка Лича Λ_{24} дает абсолютный минимум функции $\eta(\Gamma)$ для $n = 24$: $\eta(\Lambda_{24}) = 8 < \eta(A_{24}^*) = 9.514 \dots$. Оценки функции $\eta(\Gamma)$, лучшие (меньшие), чем $\eta(A_n^*)$, были найдены для всех размерностей $n > 24$ в работах [2] и [3]; для $5 < n < 24$ такие оценки известны только для размерностей $n = 22, 23$ [4] и $n = 9$ [5].

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \eta_{11} &\leq \eta(A_{11}^4) = 4.875 \dots < \eta(A_{11}^*) = 4.978 \dots, \\ \eta_{14} &\leq \eta(A_{14}^5) = 5.891 \dots < \eta(A_{14}^*) = 6.040 \dots, \end{aligned}$$

где $\eta_n = \inf_{\Gamma \subset E^n} \eta(\Gamma) = \min_{\Gamma \subset E^n} \eta(\Gamma)$, A_{11}^4 и A_{14}^5 – решетки Коксетера (см. [6]).

2. Полное описание L -разбиений решеток Коксетера A_{11}^4 и A_{14}^5 . Формы A_{11}^4 и A_{14}^5 имеют характеристики: арифметический минимум $\min A_{11}^4 = 1$, $\min A_{14}^5 = 1$; число пар минимальных векторов $s(A_{11}^4) = 66$, $s(A_{14}^5) = 105$; определитель $\det A_{11}^4 = 3/2^{13}$, $\det A_{14}^5 = 3/(5 \cdot 2^{14})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. L -разбиение решетки A_{11}^4 образовано многогранниками, конгруэнтными 16 попарно неэквивалентным L -телам, характеристики которых указаны в таблице. Максимальное значение радиуса L -тел достигается на теле L_3 и квадрат радиуса решетчатого покрытия равен $R^2(A_{11}^4) = 19/32$. Тем самым $\eta(A_{11}^4) = 19/4 \cdot \sqrt[11]{4/3} = 4.875 \dots$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. L -разбиение решетки A_{14}^5 образовано многогранниками, конгруэнтными 31 попарно неэквивалентным L -телам. Максимальное значение квадрата радиуса L -тел (т.е. квадрат радиуса решетчатого покрытия) равно $R^2(A_{14}^5) = 71/100$. Тем самым $\eta(A_{14}^5) = 142/25 \cdot \sqrt[14]{5/3} = 5.891 \dots$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00619).

3. Пояснения к таблице. В таблице в графе “L” приводятся “технические” номера L -тел (от 0 до 15). В графе “ $8R^2$ ” указаны квадраты радиусов шаров, описанных вокруг L -тел, умноженные на 8. В графе “V” указано количество вершин L -тела. Обозначения в графе “Описание”, означают следующее.

“ $p(n+1)$ ” – n -мерный симплекс, состоящий из $n+1$ вершины.

“ $O(k) + p(t)$ ”, где $k+t=n$, – “ t -этажная” пирамида, построенная над k -мерным ортаэдром.

“ $O(n)$ ” – n -мерный ортаэдр.

“ $O(3) + p(9)$ ” – тело, являющееся выпуклой оболочкой 3-мерного ортаэдра (т.е. октаэдра) и добавленных к нему 9 вершин.

“ $O(5) + O(5)$ ” – тело, состоящее из двух разнесенных в пространстве ортаэдров размерностей 5 и 5. Отметим, что именно это L -тело имеет максимальный радиус в размерности $n=11$, совпадающий с радиусом решетчатого покрытия.

Для исследованных решеток построены схемы соседства (классов) L -тел. В случае $n=11$ соседство многогранников (вида) L_4 с L_7 осуществляется по двум попарно неэквивалентным классам гиперграней. В случае $n=14$ для пяти пар (классов) многогранников соседство осуществляется по двум попарно неэквивалентным классам гиперграней, а для одной пары классов многогранников соседство осуществляется по трем попарно неэквивалентным классам гиперграней. В остальных случаях соседства осуществляются по попарно эквивалентным гиперграням. В заключение отметим, что в обоих рассматриваемых случаях встречаются правильные симплексы. Их относительные объемы равны 4 и 5 соответственно. Это заранее известные L -тела (см. [7]), с которых мы и начинали перечисление всех L -тел.

L	$8R^2$	V	Описание	L	$8R^2$	V	Описание
L_0	$3\frac{2}{3}$	12	$p(12)$	L_{12}	$4\frac{5}{16}$	14	$O(3) + p(8)$
L_6	$4\frac{5}{12}$	12	$p(12)$	L_{14}	$4\frac{1}{6}$	14	$O(3) + p(8)$
L_9	$4\frac{2}{3}$	12	$p(12)$	L_2	$4\frac{67}{100}$	16	$O(5) + p(6)$
L_{10}	$4\frac{305}{588}$	12	$p(12)$	L_4	$4\frac{5}{8}$	16	$O(5) + p(6)$
L_{13}	$4\frac{1}{4}$	12	$p(12)$	L_7	$4\frac{5}{8}$	16	$O(5) + p(6)$
L_{15}	$3\frac{263}{300}$	12	$p(12)$	L_1	$4\frac{1}{4}$	22	$O(11)$
L_5	$4\frac{23}{48}$	14	$O(3) + p(8)$	L_8	$4\frac{1}{2}$	15	$O(3) + p(9)$
L_{11}	$4\frac{5}{12}$	14	$O(3) + p(8)$	L_3	$4\frac{3}{4}$	20	$O(5) + O(5)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. С. Рышков, Е. П. Барановский // Труды МИАН. 1976. Т. 137. [2] С. С. Рышков // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 2. С. 303–305. [3] R. P. Bambah, N. J. A. Sloane // Acta Arith. 1982. V. 42. P. 107–109. [4] W. D. Smith. Studies in Computational Geometry Motivated by Mesh Generation // Ph.D. Dissertation, Dept. of Applied Mathematics, Princeton Univ., 1988. [5] Е. П. Барановский // European J. Combin. 1994. V. 15. № 4. P. 317–323. [6] Н. С. М. Coxeter // Canad. J. Math. 1951. V. 3. P. 391–441. [7] С. С. Рышков // Записки научн. семина. ЛОМИ. 1973. Т. 33. С. 65–71.

Принято редколлегией
23.01.2002