Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, Г. С. Скордев, Теорема совпадения для M -подобных континуумов, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 2, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:04:18

ТЕОРЕМА СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ M -ПОДОБНЫХ КОНТИНУУМОВ

С. А. БОГАТЫЙ, Г. С. СКОРДЕВ

При исследовании динамических свойств рационального (или даже полиномиального) отображения $f: S^2 \rightarrow S^2$ сферы Римана в себя бывает полезно рассмотреть ламинацию (S^2, f) . В работе исследуются свойства ламинации, близкие к свойству неподвижной точки. При этом мы рассматриваем ламинации, полученные “переменными” отображениями фиксированного связного компактного ориентированного многообразия M^n без края. Известно [1; теорема 1*], что компактное пространство Y представимо в виде предела обратной последовательности

$$M_1^n \xleftarrow{p_1^2} M_2^n \xleftarrow{p_2^3} \dots M_i^n \xleftarrow{p_i^{i+1}} \dots \quad (\mathcal{M})$$

n -мерных многообразий без края тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -отображение $f_\varepsilon: Y \rightarrow M^n$.

Мы будем предполагать, что в спектрах, задающих компакты X и Z , все связывающие отображения имеют ненулевую степень. Про спектр, задающий компакт Y , будем дополнительно предполагать, что все пространства гомеоморфны фиксированному многообразию M .

Всякое отображение $f: M \rightarrow M$ многообразия в себя ненулевой степени (например, полиномиальное или рациональное отображение сферы $M = S^2$) порождает такое пространство $Y = (M, f)$ – обратный предел последовательности $\mathcal{M}$, в которой все связывающие отображения p_i^{i+1} совпадают с f . Согласно теоремам Понтрягина и Баума [2; следствие 3] всякая связная компактная топологическая группа G конечной размерности n представима в виде обратного предела последовательности $\mathcal{M}$, в которой пространство M является связной компактной группой Ли, а связывающие отображения p_i^{i+1} являются гомоморфизмами, в частности, накрытиями, поэтому имеют ненулевую степень.

Пусть X и Z являются пределами спектров $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ соответственно из n -мерных многообразий без края со связывающими отображениями π_i^j и p_i^j ненулевой степени и предельными проекциями $\pi_i: X \rightarrow N_i^n$ и $p_i: Z \rightarrow M_i^n$ соответственно. Известно, что для отображения $f: X \rightarrow Z$ для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого индекса i существуют такой индекс $\varphi(i)$ и такое отображение $f_i: N_{\varphi(i)} \rightarrow M_i$, что $\varrho(f_i \circ \pi_{\varphi(i)}, p_i \circ f) < \varepsilon$.

Степенью $\deg_{\mathcal{N}, \mathcal{M}} f$ отображения f называется число

$$\deg_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f) = \deg(f_i) \cdot \deg p_1^i / \deg \pi_1^{\varphi(i)}.$$

Если число ε настолько мало, что любые два ε -близкие отображения гомотопны, то определенное нами число не зависит от взятой аппроксимации (в частности, от индекса i). Доказательство легко вытекает из гомотопической инвариантности и мультипликативности степени для отображений многообразий. Степень обладает следующими важными свойствами:

- (1) $\deg_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}(\text{Id}) = 1$;
- (2) $\deg_{\mathcal{K}, \mathcal{M}}(f \circ g) = \deg_{\mathcal{K}, \mathcal{N}}(g) \cdot \deg_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f)$.

В случае, когда все многообразия M_i гомеоморфны, можно корректно определить число Лефшеца (число совпадения). Для пары отображений $f, g: X \rightarrow Y$ рассмотрим индекс, допускающий одновременную аппроксимацию $f_i, g_i: N_{\varphi(i)}^n \rightarrow M_i^n$. Положим $\Lambda_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f, g) = \Lambda(f_i, g_i) \cdot \deg p_1^i / \deg \pi_1^{\varphi(i)}$, где $\Lambda(f_i, g_i)$ – обычное число Лефшеца отображения многообразий. Корректность введенного числа легко вытекает из следующего предложения, которое в свою очередь вытекает из теоремы Хопфа [3; теорема 14.2.5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\pi: K^n \rightarrow N^n$ и $p: M^n \rightarrow M^n$ – отображения ненулевой степени, то для всякой пары отображений $f, g: N^n \rightarrow M^n$ справедливо равенство:

$$\Lambda(p \circ f \circ \pi, p \circ g \circ \pi) = \deg(\pi) \cdot \deg(p) \cdot \Lambda(f, g).$$

Работа выполнена во время визита первого автора в университет г. Бремен при частичной поддержке РФФИ (грант № 00-01-00304). Авторы благодарят Х.-О. Пайтгена и Х. Цишанга за поддержку.

Следовательно, $\Lambda(f_i, g_i) \cdot \deg p_1^i / \deg \pi_1^{\varphi(i)} = \Lambda(p_1^i \circ f_i, p_1^i \circ g_i) / \deg \pi_1^{\varphi(i)} = \Lambda(f_1 \circ \pi_{\varphi(1)}^{\varphi(i)}, g_1 \circ \pi_{\varphi(1)}^{\varphi(i)}) / \deg \pi_1^{\varphi(i)} = \Lambda(f_1, g_1) / \deg \pi_1^{\varphi(1)}$. В доказательстве мы считали, что индекс $\varphi(i)$ так велик, что отображения $p_1^i \circ f_i$ и $f_1 \circ \pi_{\varphi(1)}^{\varphi(i)}$ (соответственно $p_1^i \circ g_i$ и $g_1 \circ \pi_{\varphi(1)}^{\varphi(i)}$) гомотопны.

ТЕОРЕМА 1. *Если для двух отображений $f, g: X \rightarrow Y$ число совпадения $\Lambda_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f, g) \neq 0$, то существует такая точка $x \in X$, что $f(x) = g(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \neq g(x)$ для всякой точки $x \in X$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что $\varrho(f(x), g(x)) \geq 4\varepsilon$ для всех $x \in X$. Тогда существует такой индекс i , что $\varrho(p_i \circ f(x), p_i \circ g(x)) \geq 3\varepsilon$ для всех $x \in X$. Следовательно, для некоторого индекса $\varphi(i)$ $\varrho(f_i \circ \pi_{\varphi(i)}(x), g_i \circ \pi_{\varphi(i)}(x)) \geq \varepsilon$ для всех $x \in X$. Но $\Lambda(f_i, g_i) = \Lambda_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f, g) \cdot \deg \pi_1^{\varphi(i)} / \deg p_1^i \neq 0$, поэтому согласно классической теореме Лефшеца существует такая точка $\tilde{x} \in X_{\varphi(i)}$, что $f_i(\tilde{x}) = g_i(\tilde{x})$.

Как и в случае отображения многообразий, если $c: X \rightarrow Y$ – постоянное отображение в одну точку, то $\Lambda_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f, c) = \deg_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f)$. Хотя введенное число совпадения зависит от представляющих спектров, можно получить некоторые “абсолютные” соотношения. Например, справедлив аналог теоремы Фаделла–Брукса–Вонга [4; теорема 3.22].

ТЕОРЕМА 2. *Если $Y = G$ является связной компактной n -мерной группой, то для всякой пары отображений $f, g: X \rightarrow G$ справедливо равенство:*

$$\Lambda_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f, g) = \deg_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f/g).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $\pi: Z \rightarrow X$ и $p: Y \rightarrow Y$ – отображения ненулевой степени, то для всякой пары отображений $f, g: X \rightarrow Y$ справедливо равенство:*

$$\Lambda_{\mathcal{K}, \widetilde{\mathcal{M}}}(p \circ f \circ \pi, p \circ g \circ \pi) = \deg_{\mathcal{K}, \mathcal{N}}(\pi) \cdot \deg_{\mathcal{M}, \widetilde{\mathcal{M}}}(p) \cdot \Lambda_{\mathcal{N}, \mathcal{M}}(f, g).$$

Фактически с помощью спектров $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ в пространствах X и Y введена двойственность Пуанкаре и далее число совпадения определяется стандартным образом как альтернированная сумма следов индуцированных гомоморфизмов гомологий и когомологий Чеха с рациональными коэффициентами. Степень отображения также определяется индуцированным гомоморфизмом в старших гомологиях и когомологиях, но уже не имеет геометрической интерпретации как кратность. Рассмотрим отображение единичной окружности $f: S^1 \rightarrow S^1$, переводящее точку в ее квадрат. Тогда обратный предел (S^1, f) является 2-адическим соленоидом. Степень индуцированного гомеоморфизма сдвига $\widehat{f}: (S^1, f) \rightarrow (S^1, f)$ равна 2.

В случае $X = Y$ и $g = \text{Id}$ число $\Lambda_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}(f, \text{Id})$ можно определить по схеме Хопфа, пользуясь только гомологиями или когомологиями с рациональными коэффициентами. Для связной компактной конечномерной группы три задачи нахождения совпадения, неподвижной точки и корня эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $X = Y = G$ является связной компактной n -мерной группой, то для всякой пары отображений $f, g: G \rightarrow G$ справедливо равенство:*

$$\Lambda_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}(f, g) = \Lambda_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}(h, \text{Id}) = \deg_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}(f/g),$$

где $h(x) = f(x) \cdot x/g(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Mardešić, J. Segal // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. №1. P. 146–164.
 [2] P. F. Baum // Pacific J. Math. 1967. V. 22. №2. P. 197–204. [3] R. Stöcker, H. Zieschang. Algebraische Topologie. Stuttgart: Teubner, 1988. [4] С. А. Богатый, Д. Л. Гонсалвес, Х. Цишанг // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 52–86.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Факультет математики университета Бремена, Германия

E-mail: bogaty@mech.math.msu.su; skordev@cevis.uni-bremen.de

Принято редколлегией

23.01.2002