Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Брежнев, Об уравнениях Дубровина для конечнозонных операторов,
УМН, 2002, том 57, выпуск 2, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:34:02

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДУБРОВИНА ДЛЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ю. В. БРЕЖНЕВ

До недавнего времени не поднимался вопрос: как перенести построения, связанные с уравнениями Дубровина (УД) в теории конечнозонных потенциалов оператора Шрёдингера [1], на произвольные спектральные задачи? Имеются в виду уравнения на нули Ψ -функции и формулы следов. Хотя физическая интерпретация этих объектов как аналогов данных рассеяния в обобщениях не столь очевидна, либо вовсе отсутствует, упомянутая проблема имеет самостоятельную ценность, хотя бы по той причине, что известные уравнения Новикова, возникающие в общей теории конечнозонного интегрирования, являются (по всей видимости в самом общем случае) вполне интегрируемыми конечномерными динамическими системами, а сведение УД к задаче обращения Якоби реализует их интегрируемость по Лиувиллю. Добавим, что если алгебраическая кривая накрывает эллиптические кривые, то по формулам следов предъявляются решения в эллиптических функциях, собственно новые конечнозонные потенциалы и различные приложения к нелинейным уравнениям в частных производных.

В заметке [2] было обнаружено универсальное свойство конечнозонных потенциалов: они образуют класс, для которого спектральная задача интегрируется в квадратурах. Там же показано, как получать все ингредиенты прямой спектральной задачи: Ψ -формулу, алгебраическую кривую, уравнения Новикова и их интегралы. Если, коль скоро известна Ψ , естественно ожидать, что уравнения на ее нули $\gamma_k(x)$ должны выписываться на основании элементарных соображений. Это имеет место быть, и мы показываем, как алгоритмически решается проблема с появлением сопутствующих моментов: формул следов и преобразования Абеля. Мы не обсуждаем здесь отдельный вопрос о точном соответствии между алгебраической кривой и дивизором нулей $\{\gamma_k\}$ с одной стороны и краевыми условиями типа Дирихле $\Psi(x_0) = \Psi(x_0 + \Omega) = 0$ с другой в контексте восстановления потенциала по этим данным как данным рассеяния на интервале для произвольных спектральных задач. Совокупность $\{\gamma_k\}$ рассматривается как отправной пункт. Продемонстрируем идеологию на примере скалярного операторного λ -пучка 3-го порядка

$$\Psi''' + u(\lambda; x) \Psi' + v(\lambda; x) \Psi = 0, \quad (1)$$

где u, v – рациональные функции по λ с полюсами, не зависящими от x . Условимся называть их потенциалом $[U]$. Пусть он конечнозонный. Тем самым Ψ -функция, возможно, станет многооточечной функцией Бейкера–Ахизера [3]. Операторный пучок, коммутирующий с (1) (т.е. второе уравнение на общую собственную функцию), в общем случае имеет вид:

$$A(\lambda; x) \Psi'' + B(\lambda; x) \Psi' + C(\lambda; x) \Psi = \mu \Psi, \quad C = \frac{2}{3} u A - \frac{1}{3} A'' - B',$$

где A и B – полиномы по λ и дифференциальные полиномы от $[U]$. Следуя [2], получаем алгебраическую кривую $W(\mu, \lambda) = 0$ и два необходимых представления для Ψ -функции

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{(A' + B)(\mu - C) + A C' - v A^2}{A \mu - F} = -3 \frac{(\mu^2 + Q) A^2 + A F \mu + F^2}{A \Pi} + \frac{A' + B}{A}, \quad (2)$$

$$-3 F = A A'' + u A^2 + 3 B (A' + B),$$

$$\Pi(\lambda; x) = (3v - u') A^3 + (2A''' + 3B'' + 3uB + 2uA') A^2 + 3AB(A'' + B') + 3B^2(A' + B).$$

Второе выражение для Ψ в (2) получено обращением в полином первого, как рациональной функции по μ , с помощью уравнения кривой: $W(\mu, \lambda) \equiv \mu^3 + Q(\lambda) \mu + R(\lambda) = 0$. Полная совокупность нулей $\{\gamma_k\}$ на всех листах римановой поверхности $W(\mu, \lambda) = 0$ определяется полюсами Ψ'/Ψ и факторизует знаменатель $\Pi = a \cdot (\lambda - \gamma_1) \cdots (\lambda - \gamma_n)$. В свою очередь, знаменатель первой из формул (2) определяет вторую координату (номер листа) на кривой нуля Ψ -функции: $\mu_k = \mu(\gamma_k(x))$. Имеем отсюда, что $F(\lambda; x) \rightarrow \mu_k(x) A(\gamma_k; x)$, когда $\lambda \rightarrow \gamma_k$. Используя этот факт и осуществляя во 2-й формуле (2) предел $\lambda \rightarrow \gamma_k$, получаем аналоги УД:

$$\gamma'_k = 3A(\gamma_k; x) \frac{3\mu_k^2 + Q(\gamma_k)}{a \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}, \quad \mu'_k = -3A(\gamma_k; x) \frac{Q'(\gamma_k) \mu_k + R'(\gamma_k)}{a \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}, \quad \mu_k = \frac{F(\gamma_k; x)}{A(\gamma_k; x)}. \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00782) и Королевского Общества Великобритании.

До этого места мы ничем не ограничивались, поэтому уравнения (3) справедливы для любого операторного пучка (1), а способ вывода без изменений переносится на высшие порядки. Первая система уравнений в (3) недавно появилась в [4] на примере спектральной задачи уравнения Буссинеска (не считая опечатки в t -группе УД (5.34) на с. 852). Однако мотивировки, доказательства и примеры не приведены. В то же время методика их получения требует лишь приведенных простых рассуждений. Отметим еще два принципиальных момента, не затрагиваемые в [4]. 1) УД следует привести к автономному виду. В форме же (3) они содержат потенциал в A -функции. 2) Потенциал $[U]$ выражается через Ψ -функцию (т.е. через Θ). Опираясь на это, сформулируем вопрос: для каких λ -пучков конечнозонный потенциал однозначно восстанавливается по координатам нулей Ψ ? Будет ли он абелевой функцией на якобиане кривой? Оператор Шрёдингера, не считая родственных модификаций, является единственным известным примером, где этот вопрос решается главной формулой следов, содержащей $\sum \gamma_k$. Но произвольная абелева функция есть симметрическая комбинация верхних пределов абелевых интегралов в задаче обращения Якоби. Координаты (γ_k, μ_k) становятся равноправными, и, возможно, обе войдут в тождества следов. Этим обусловлено появление второй группы уравнений в (3). Нетрудно привести примеры, когда разрешение пункта 1) далеко не очевидно (и даже невозможно), и общий рецепт решения сформулированной проблемы пока не известен, рассмотрим показательный пример:

$$\begin{aligned} \Psi''' + u(x) \Psi' &= \lambda \Psi, & (3u' - 9\lambda) \Psi'' + (u^2 - u'' + \alpha) \Psi' - 6\lambda u \Psi &= \mu \Psi, \\ W(\mu, \lambda): \quad \mu^3 + (27\alpha\lambda^2 + E_2)\mu + 729\lambda^5 + 81E_1\lambda^3 + E_3\lambda &= 0, & \text{род } g = 4. \end{aligned} \quad (4)$$

Максимальное, что извлекается из факторизации полинома Π , так это формула $2u' = 3\sum \gamma_k$. Но, комбинируя ее с выражением для интегралов $E_{1,3}(u, u', \dots, u^{(iv)})$ и формулами (3), получаем, как ответ на вопрос, три варианта главной формулы следов соответственно:

$$u = -\frac{3}{2\alpha} \left\{ E_1 + \sum_{k=1}^4 \left(\gamma_k''' + \frac{15}{2} \gamma_k^2 \right) \right\}, \quad u = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^4 \gamma_k \mu_k \frac{\sum_{j=1}^4 \gamma_j - 2\gamma_k}{\prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)}, \quad u = \frac{E_3 + 3^6 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}{6E_1}.$$

Интегральная форма уравнений (3) в виде задачи обращения Якоби и базис голоморфных дифференциалов для тригональной негиперэллиптической кривой (4) имеют вид:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^4 \int_{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} = a_1, & \sum_{k=1}^4 \int_{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\lambda d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} = a_2, \\ \sum_{k=1}^4 \int_{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\mu d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} = a_3, & \sum_{k=1}^4 \int_{(\gamma_k, \mu_k)} \frac{\lambda^2 d\lambda}{3\mu^2 + Q(\lambda)} = a_4 - \frac{1}{81} x, \end{cases} \quad Q(\lambda) = 27\alpha\lambda^2 + E_2.$$

Голоморфные абелевы дифференциалы для любой кривой $W(\mu, \lambda) = 0$ можно записать в каноническом виде $d\omega = P(\mu, \lambda) W_\mu^{-1} d\lambda$ [5; §39], однако нельзя утверждать, что к ним всегда приводят УД. Достаточно контрпримера $\Psi'' = \lambda u(x) \Psi$, когда прямые аналоги ни УД, ни формул следов не имеют места. Но в этом примере Ψ не является классической функцией Бейкера–Ахиезера [3], хотя коммутирующий оператор, кривая и Ψ -формула предъявляются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. А. Дубровин // Функции, анализ и его прил. 1975. Т. 9. № 3. С. 41–51. [2] Н. В. Устинов, Ю. В. Брежнев // УМН. (в печати). [3] И. М. Кричевер // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 183–208. [4] R. Dickson, F. Gesztesy, K. Unterkofler // Rev. Math. Phys. 1999. V. 11. P. 823–879. [5] Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.