Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Булинский, С. В. Дильман, Универсальная нормировка в законе повторного логарифма, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 2, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:46:28

УНИВЕРСАЛЬНАЯ НОРМИРОВКА В ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

А. В. Булинский, С. В. Дильман

Классический закон повторного логарифма, впервые установленный для сумм независимых бернуллиевских величин Хинчиным, является источником различных обобщений. Так, известная теорема Хартмана–Винтнера утверждает, что для независимых одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \dots$ с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = 1$ (такую последовательность будем называть *стандартной*) верхний и нижний пределы нормированных сумм $S_n/\sqrt{2n \ln \ln n}$ равны п.н. соответственно 1 и -1 ; здесь $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 3$. После доказательства знаменитого интегрального критерия Колмогорова–Петровского, описывающего “верхние” и “нижние” функции для броуновского движения, аналогичный критерий в схеме суммирования независимых случайных величин был получен Эрдешем и Феллером. Если этому критерию удовлетворяет последовательность центрированных величин X_n (возможно, зависимых) с $EX_n^2 < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) и таких, что $B_n = ES_n^2 \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), то, как показано в [1], для любой функции $\varphi(t) \nearrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{B_n} \varphi(B_n)} = 1 \text{ п.н.} \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{2 \ln \ln n}} = 1. \quad (2)$$

Назовем *универсальной* (для класса стандартных последовательностей случайных величин) такую нормировку, т.е. последовательность положительных чисел $\varphi(n) \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), что для любой стандартной последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$ п.н. выполняются соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n} \varphi(n)} = 1 \text{ и } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n} \varphi(n)} = -1. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА. *Свойство универсальности нормировки $\{\varphi(n)\}_{n \geq 1}$ равносильно справедливости условия (2).*

Необходимость утверждения следует из приведенного выше результата [1]. Кроме того, последовательность $\{-X_n\}_{n \geq 1}$ будет стандартной, если стандартна $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Поэтому достаточно показать первое соотношение (3) для любой нормировки $\{\varphi(n)\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющей (2).

Построим вначале вспомогательную последовательность $\{\psi(n)\}_{n \geq 1}$. Положим $LL(n) = \ln \ln n$ при $n \geq 3$ и $LL(1) = LL(2) = 1$. Возьмем две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{A_k\}_{k \geq 1}$ и $\{B_k\}_{k \geq 1}$ такие, что $A_1 = 1$, $A_k < B_k < A_{k+1} - 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть также

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{LL(A_k)} < \infty \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in (B_k, A_{k+1})} \frac{1}{n \ln n} = \infty. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что такие последовательности существуют, причем $(B_k, A_{k+1}) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Определим

$$\psi(n) = \sqrt{2LL(B_k)} \text{ для } n \in [A_k, B_k] \text{ и } \psi(n) = \sqrt{2LL(n)} \text{ для } n \in (B_k, A_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00-01-00131) и фонда INTAS (грант № 99-01317).

ЛЕММА. Данная последовательность $\{\psi(n)\}_{n \geq 1}$ есть универсальная нормировка.

Доказательство леммы состоит в том, чтобы для каждого $C > 3$ установить соотношение

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{m_k}}{\sqrt{m_k} \psi(m_k)} \geq \sqrt{\frac{C-1}{C}} - \sqrt{\frac{1}{C}}, \quad (6)$$

где $m_k = \sum_{j=1}^k n_j$, $n_j = [C^j]$, $k, j \in \mathbb{N}$. Для этого проверяем, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{m_k} - S_{m_{k-1}}}{\sqrt{n_k} \psi(n_k)} \geq 1 \text{ п.н.} \quad (7)$$

Здесь используется результат [2], согласно которому

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(S_{n_k} > \psi(n_k) \sqrt{n_k}) < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} (\psi(n_k))^{-1} \exp \left\{ -\frac{\psi^2(n_k)}{2\sigma^2(n_k)} \right\} < \infty,$$

где $\sigma^2(n)$ — это дисперсия урезанной величины $X_n I\{|X_n| < \sqrt{n}\}$.

Теперь введем множество $\mathcal{K}_C$, состоящее из натуральных k , для которых на $[n_k + 1, m_k]$ найдется хотя бы одна точка последовательности $\{A_n\}_{n \geq 1}$. Пользуясь тем, что промежутки $[n_k + 1, m_k] \subset [C^k, C^{k+1}/(C-1)]$ (и тем самым не пересекаются при разных k), а также условием (4), леммой Бореля–Кантелли и неравенством Чебышёва, выводим, что в случае бесконечного множества $\mathcal{K}_C$

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{K}_C} \frac{S_{m_k} - S_{m_{k-1}}}{\sqrt{m_k} \psi(n_k)} = 0 \text{ п.н.} \quad (8)$$

Поскольку $m_k/n_k \sim C/(C-1)$ при $k \rightarrow \infty$, из (7) и (8) вытекает, что при каждом $C > 3$ и любой структуре множества $\mathcal{K}_C$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty, k \notin \mathcal{K}_C} \frac{S_{m_k}}{\sqrt{m_k} \psi(n_k)} \geq \sqrt{\frac{C-1}{C}} \text{ п.н.} \quad (9)$$

Из (9) и теоремы Хартмана–Винтнера, а также соотношения $\lim_{k \rightarrow \infty, k \notin \mathcal{K}_C} \psi(m_k)/\psi(n_k) = 1$ следует (6), что завершает доказательство леммы.

Продолжим доказательство теоремы. С учетом (2) достаточно рассматривать лишь такие нормировки, что $\varphi(n) \geq \sqrt{2LL(n)}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В силу (2) найдется последовательность натуральных чисел $1 = j_1 < j_2 < \dots$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(j_k)}{\sqrt{2LL(j_k)}} = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{LL(j_k)} < \infty \text{ и } LL(j_k) - LL(j_{k-1}) \geq 2$$

при всех $k \geq 2$. Введем $\beta(1) = \varphi(1)$ и $\beta(n) = \varphi(j_k)$ для $n \in (j_{k-1}, j_k]$, $k \geq 2$. Тогда $\varphi(n) \leq \beta(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $A_1 = 1$, $B_1 = 2$, $A_2 = 4$, $B_2 = 5$ и для $k \geq 3$ пусть

$$A_k = j_{k-1} + 1, \quad B_k = \max \left\{ n \in (j_{k-1} + 1, j_k) \cap \mathbb{N} : \sum_{m \in (n, j_k]} \frac{1}{m \ln m} \geq 1 \right\}.$$

По этим $\{A_k\}_{k \geq 1}$ и $\{B_k\}_{k \geq 1}$ определим $\{\psi(n)\}_{n \geq 1}$ согласно (5). В силу наших построений $\beta(n) \sim \psi(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из доказанной леммы.

Тем самым получено обобщение теоремы Хартмана–Винтнера, а также результата недавней работы [3]. В частности, дается положительный ответ на вопрос, поставленный в [3], о существовании универсальной нормировки, для которой $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(n)/\sqrt{2 \ln \ln n} = \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Булинский // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22. № 2. С. 407–409. [2] С. С. Heyde // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 1969. V. 11. P. 181–192. [3] О. Klesov, A. Rosalsky // Stochastic Anal. Appl. 2001. V. 19. № 4. P. 627–641.