Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, В. М. Кесельман, Основная частота и конформный тип риманова многообразия, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 2, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:02:23

ОСНОВНАЯ ЧАСТОТА И КОНФОРМНЫЙ ТИП РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Зорич, В. М. Кесельман

I. Введение и формулировка основного результата. В этой заметке отмечена взаимосвязь конформного типа риманова многообразия и его основной частоты.

Рассматривается произвольное некомпактное n -мерное риманово многообразие (M^n, g) с краем (возможно, пустым). Здесь g – исходная риманова метрика на M^n . Порождаемые этой метрикой n - и $(n-1)$ -меры Хаусдорфа (объем и площадь) будем обозначать через μ и σ соответственно.

Емкость конденсатора. Под конденсатором на M^n понимают упорядоченную пару (F, G) , где G – открытое множество в M^n , а F – компакт в G . Для произвольно заданного числа $p > 1$ величина

$$\text{cap}_p(F, G) := \inf_f \int_G |\nabla f|^p d\mu$$

называется p -емкостью конденсатора (F, G) . Здесь нижняя грань берется по всем гладким финитным в G функциям f таким, что $f \equiv 1$ на F и $0 \leq f \leq 1$ в G .

Конформные метрики. Наряду с исходной метрикой, мы будем рассматривать на M^n также римановы метрики $\tilde{g}$ вида $\tilde{g} = \gamma^2 g$, где γ – некоторая положительная регулярная функция на M^n . Такие метрики $\tilde{g}$ называются *конформно эквивалентными* или, короче, *конформными* метрике g .

Легко видеть, что в случае $p = n$ при переходе от метрики g к конформной ей метрике значение емкости произвольного конденсатора на M^n не меняется. По этой причине величина $\text{cap}_n(F, G)$ называется также *конформной емкостью* конденсатора (F, G) .

Конформный тип риманова многообразия. Для данного многообразия M^n величина $\text{cap}_p(F, M^n)$ либо положительна, либо равна нулю независимо от выбора невырожденного континуума (отличного от точки связного компакта) F .

Говорят, что многообразие M^n имеет *конформно-гиперболический тип*, если $\text{cap}_n(F, M^n) > 0$ для любого (или хотя бы одного) невырожденного континуума $F \subset M^n$; в противном случае говорят, что многообразие M^n имеет *конформно-параболический тип*.

Ввиду отмеченной инвариантности конформной емкости, конформный тип многообразия определен конформно инвариантно.

Основная частота. Пусть G – открытое множество в M^n . При заданном числе $p > 1$ величина

$$\lambda_p(G) := \inf_f \frac{\int_G |\nabla f|^p d\mu}{\int_G |f|^p d\mu}$$

называется p -основной частотой множества G . Здесь нижняя грань берется по всем гладким финитным в G функциям $f \not\equiv 0$.

При $p = 2$ величина $\lambda_2(G)$ является первым собственным значением оператора Лапласа однородной задачи Дирихле в G . В общем случае это же относится к уравнению $-\text{div}(|\nabla f|^{p-2} \nabla f) = \lambda |f|^{p-2} f$.

Рассматривая новую метрику $\tilde{g}$ на M^n , для p -основной частоты множества G будем также использовать обозначение $\lambda_p(G, \tilde{g})$.

ТЕОРЕМА. Многообразие (M^n, g) имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда существует конформная метрике g метрика $\tilde{g}$, для которой $\lambda_n(M^n, \tilde{g}) > 0$.

Следовательно, многообразие (M^n, g) имеет конформно-параболический тип лишь тогда, когда в любой метрике $\tilde{g}$, конформно эквивалентной его исходной метрике, $\lambda_n(M^n, \tilde{g}) = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01086).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если многообразие (M^n, g) имеет конформно-гиперболический тип, то на нем также существуют конформные g метрики $\tilde{g}$, для которых $\lambda_n(M^n, \tilde{g}) = 0$.

II. Вспомогательные неравенства. Укажем некоторые понятия и соотношения, которые будут использованы при доказательстве сформулированных утверждений.

Константа Мазы. Следуя работе [1], введем величину

$$m_p(G) := \inf_{F \subset G} \frac{\text{cap}_p(F, G)}{\mu(F)},$$

связанную с p -основной частотой неравенствами:

$$a_p m_p(G) \leq \lambda_p(G) \leq m_p(G), \quad (1)$$

где $a_p = (p-1)^{p-1} p^{-p}$.

Левое (нетривиальное) неравенство в (1), по существу, доказано в [2]. Правое – непосредственно следует из определений p -емкости $\text{cap}_p(F, G)$ и p -основной частоты $\lambda_p(G)$.

Изопериметрическое неравенство. Непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $I(v)$ называется *изопериметрической функцией многообразия* (M^n, g) , если для любого предкомпактного открытого множества $G \subset M^n$ с гладкой границей ∂G выполняется неравенство:

$$I(\mu(G)) \leq \sigma(\partial G \setminus \partial M^n),$$

где ∂M^n – край многообразия M^n .

Если $I(v)$ – изопериметрическая функция многообразия (M^n, g) , то для константы Мазы $m_p(G)$ произвольного открытого множества $G \subset M^n$ имеет место следующая оценка:

$$\inf_{F \subset G} \frac{1}{\mu(F)} \left(\int_{\mu(F)}^{\mu(G)} (I(v))^{\frac{p}{1-p}} dv \right)^{1-p} \leq m_p(G). \quad (2)$$

Эта оценка непосредственно вытекает из соответствующего неравенства для емкости $\text{cap}_p(F, G)$, полученного в [2].

III. Доказательства. Докажем утверждения, сформулированные в разделе I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим, что многообразие (M^n, g) имеет конформно-гиперболический тип. Тогда, на основании результата работы [3], на M^n существует конформная g метрика $\tilde{g}$, для которой изопериметрическая функция $I(v)$ многообразия $(M^n, \tilde{g})$ имеет вид $I(v) = v$. Следовательно, в силу неравенства (2), константа Мазы $m_n(M^n)$ (относительно метрики $\tilde{g}$) положительна. Отсюда, на основании левой части соотношения (1), $\lambda_n(M^n, \tilde{g}) > 0$.

С другой стороны, если многообразие (M^n, g) имеет конформно-параболический тип, то для любой конформной g метрики $\tilde{g}$ константа Мазы $m_n(M^n) = 0$. Отсюда, в силу правой части соотношения (1), $\lambda_n(M^n, \tilde{g}) = 0$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ. Заметим прежде всего, что исходную метрику g можно считать полной, так как этого всегда можно добиться конформным изменением метрики. Фиксируем теперь компактное исчерпание $\{F_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, многообразия M^n и построим на M^n гладкую положительную функцию $\gamma \geq 1$ такую, что $k \text{cap}_n(F_k, M^n) \leq \int_{F_k} \gamma^n d\mu$ для всех k . Тогда в полной метрике $\tilde{g} = \gamma^2 g$ константа Мазы $m_n(M^n)$ равна 0. Следовательно, для этой же метрики, ввиду (1), $\lambda_n(M^n, \tilde{g}) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Grigor'yan // Oper. Theory Adv. Appl. 1999. V. 109. P. 139–153. [2] В. Г. Мазья. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1985. [3] В. А. Зорич, В. М. Кесельман // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 2. С. 12–23.