Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллионщиков, Филиформные N -градуированные алгебры Ли, УМН, 2002, том 57, выпуск 2, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:05:49

ФИЛИФОРМНЫЕ $\mathbb{N}$ -ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Д. В. Миллионщиков

В настоящей заметке мы рассматриваем конечномерные $\mathbb{N}$ -градуированные алгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Такие алгебры, как легко видеть, являются нильпотентными. Изучая в [1] многообразия нильпотентных алгебр Ли, М. Вернь выделила класс так называемых филиформных алгебр Ли – нильпотентных алгебр Ли с максимальной для их размерности $\dim \mathfrak{g}$ длиной $s = \dim \mathfrak{g} - 1$ нижнего центрального ряда:

$$C^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supset C^2 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset C^k \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{k-1} \mathfrak{g}] \supset \dots \supset C^s \mathfrak{g} \neq 0 \supset \{0\}. \quad (1)$$

Идеалы $\{C^i \mathfrak{g}\}$ нижнего центрального ряда нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяют ее конечную убывающую фильтрацию C . Для фильтрованной таким образом филиформной алгебры $\mathfrak{g}$ размерности однородных компонент ее присоединенной градуированной алгебры Ли $\text{gr}_C \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\text{gr}_C \mathfrak{g})_i$ ($(\text{gr}_C \mathfrak{g})_i = C^i \mathfrak{g} / C^{i+1} \mathfrak{g}$) равны:

$$\dim(\text{gr}_C \mathfrak{g})_1 = 2, \quad \dim(\text{gr}_C \mathfrak{g})_2 = \dots = \dim(\text{gr}_C \mathfrak{g})_{n-1} = 1.$$

Простейшим примером филиформной алгебры является алгебра $\mathfrak{m}_1(n)$, заданная базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями: $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$ (соотношения вида $[e_i, e_j] = 0$ мы будем опускать).

ТЕОРЕМА 1 (М. Вернь [1]). Пусть $\mathfrak{g}$ – филиформная алгебра Ли и $\text{gr}_C \mathfrak{g}$ – ее присоединенная (относительно фильтрации C) градуированная алгебра Ли, тогда если

- 1) $\dim \mathfrak{g} = 2k + 1$, то $\text{gr}_C \mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{m}_1(2k + 1)$;
- 2) $\dim \mathfrak{g} = 2k$, то $\text{gr}_C \mathfrak{g}$ изоморфна либо $\mathfrak{m}_1(2k)$, либо $\mathfrak{m}_{1,0}(2k)$ – алгебре, заданной базисом $e_1, \dots, e_{2k}$ и коммутационными соотношениями: $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$; $[e_j, e_{2k+1-j}] = (-1)^{j+1} e_{2k}$, $j = 2, \dots, k$.

В [1] показано, что у филиформной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которой $\text{gr}_C \mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_1(n)$, существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \quad [e_i, e_j] \in F^{i+j} \mathfrak{g} = \langle e_{i+j}, \dots, e_n \rangle \quad \forall i+j \leq n. \quad (2)$$

Набор идеалов $F^k \mathfrak{g} = \langle e_k, \dots, e_n \rangle$, $k = 1, \dots, n$, определяет фильтрацию F алгебры $\mathfrak{g}$, причем для присоединенной алгебры Ли $\text{gr}_F \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n (\text{gr}_F \mathfrak{g})_i$ все подпространства $(\text{gr}_F \mathfrak{g})_i$ являются одномерными: $\dim(\text{gr}_F \mathfrak{g})_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство попарно неизоморфных $\mathbb{N}$ -градуированных алгебр Ли: алгебра $\mathfrak{g}_{7,\alpha}$, отвечающая параметру $\alpha \in \mathbb{K}$, задается базисом $e_1, \dots, e_7$ и коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3, & [e_1, e_3] &= e_4, & [e_1, e_4] &= e_5, & [e_1, e_5] &= e_6, & [e_1, e_6] &= e_7, \\ [e_2, e_3] &= (2 + \alpha)e_5, & [e_2, e_4] &= (2 + \alpha)e_6, & [e_2, e_5] &= (1 + \alpha)e_7, & [e_3, e_4] &= e_7. \end{aligned} \quad (3)$$

Другой пример связан с теорией бесконечномерных алгебр Ли: определим алгебру L_k как алгебру Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{R}^1$, имеющих $x = 0$ нулем кратности не ниже $k + 1$. Ее можно задать базисом

$$e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad i \geq k; \quad [e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad i, j \geq k.$$

Фактор-алгебра $\mathcal{V}_n = L_1 / L_{n+1}$ является филиформной алгеброй Ли.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ – $\mathbb{N}$ -градуированная алгебра Ли такая, что

$$\dim \mathfrak{g}_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, \\ 0, & i > n; \end{cases} \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \quad i \geq 2. \quad (4)$$

Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной (и только одной) из следующих алгебр:

1) алгебры Ли, составляющие 6 серий $\mathfrak{m}_1(n)$, $\mathfrak{m}_2(n)$, $\mathcal{V}_n$, $\mathfrak{m}_{1,1}(2k+2)$, $\mathfrak{m}_{1,2}(2k+2)$, $\mathfrak{m}_{1,3}(2k+3)$, заданные с помощью базиса $e_1, \dots, e_n$ и коммутационных соотношений:

алгебра	размерность	коммутационные соотношения
$\mathfrak{m}_1(n)$, $n \geq 3$	n	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$
$\mathfrak{m}_2(n)$, $n \geq 5$	n	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$ $[e_2, e_i] = e_{i+2}$, $i = 3, \dots, n-2$
$\mathcal{V}_n$, $n \geq 12$	n	$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & i+j \leq n \\ 0, & i+j > n \end{cases}$
$\mathfrak{m}_{1,1}(2k+1)$, $k \geq 3$	$2k+1$	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, 2k$ $[e_l, e_{2k-l+1}] = (-1)^{l+1}e_{2k+1}$, $l = 2, \dots, k$
$\mathfrak{m}_{1,2}(2k+2)$, $k \geq 3$	$2k+2$	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, 2k+1$ $[e_l, e_{2k-l+1}] = (-1)^{l+1}e_{2k+1}$, $l = 2, \dots, k$ $[e_j, e_{2k-j+2}] = (-1)^{j+1}(k-j+1)e_{2k+2}$, $j = 2, \dots, k$
$\mathfrak{m}_{1,3}(2k+3)$, $k \geq 3$	$2k+3$	$[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, 2k+2$ $[e_l, e_{2k-l+1}] = (-1)^{l+1}e_{2k+1}$, $l = 2, \dots, k$ $[e_j, e_{2k-j+2}] = (-1)^{j+1}(k-j+1)e_{2k+2}$, $j = 2, \dots, k$ $[e_m, e_{2k-m+3}] = (-1)^m \left((m-2)k - \frac{(m-2)(m-1)}{2} \right) e_{2k+3}$, $m = 3, \dots, k+1$.

2) алгебры Ли, образующие 5 однопараметрических семейств $\{\mathfrak{g}_{n,\alpha}\}$: это алгебры $\mathfrak{g}_{7,\alpha}$ (с базисом $e_1, e_2, \dots, e_7$ и соотношениями (3)) и их последовательные одномерные центральные расширения $\mathfrak{g}_{8,\alpha}$, $\mathfrak{g}_{9,\alpha}$, $\mathfrak{g}_{10,\alpha}$, $\mathfrak{g}_{11,\alpha}$, соответствующие коциклам:

$$\Omega_{8,\alpha} = e^1 \wedge e^7 + \alpha e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^5; \quad (5)$$

$$\Omega_{9,\alpha} = e^1 \wedge e^8 + \frac{2\alpha^2 + 3\alpha - 2}{2\alpha + 5} e^2 \wedge e^7 + \frac{2\alpha + 2}{2\alpha + 5} e^3 \wedge e^6 + \frac{3}{2\alpha + 5} e^4 \wedge e^5, \quad \alpha \neq -\frac{5}{2}; \quad (6)$$

$$\Omega_{10,\alpha} = e^1 \wedge e^9 + \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{2\alpha + 5} e^2 \wedge e^8 + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 5} e^3 \wedge e^7 + \frac{3}{2\alpha + 5} e^4 \wedge e^6, \quad \alpha \neq -\frac{5}{2}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11,\alpha} = & e^1 \wedge e^{10} + \frac{2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3}{2(\alpha^2 + 4\alpha + 3)} e^2 \wedge e^9 \\ & + \frac{4\alpha^3 + 8\alpha^2 - 8\alpha - 21}{2(\alpha^2 + 4\alpha + 3)(2\alpha + 5)} e^3 \wedge e^8 + \frac{3(2\alpha^2 + 4\alpha + 5)}{2(\alpha^2 + 4\alpha + 3)(2\alpha + 5)} e^4 \wedge e^7 \\ & + \frac{3(4\alpha + 1)}{2(\alpha^2 + 4\alpha + 3)(2\alpha + 5)} e^5 \wedge e^6, \quad \alpha \neq -\frac{5}{2}, -1, -3. \end{aligned} \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгебра $\mathfrak{g}_{n,\alpha_0}$ при $\alpha_0 = 8$ изоморфна $\mathcal{V}_n$, $n = 7, \dots, 11$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_i$ – бесконечномерная $\mathbb{N}$ -градуированная алгебра Ли такая, что $\dim \mathfrak{g}_i = 1$, $\forall i$; $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i \geq 2$. Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной (и только одной) из следующих алгебр: L_1 , $\mathfrak{m}_1 = \lim_n \mathfrak{m}_1(n)$, $\mathfrak{m}_2 = \lim_n \mathfrak{m}_2(n)$.

Последнее утверждение является частным случаем классификации А. Фиаловски бесконечномерных $\mathbb{N}$ -градуированных алгебр Ли с двумя образующими [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. Vergne // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116. [2] А. Фиаловски // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 2. С. 62–64.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: million@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.01.2002