Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О динамике “блуждающих” нулей полиномов, ортогональных на нескольких отрезках, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 2, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:37:41

О ДИНАМИКЕ “БЛУЖДАЮЩИХ” НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

С. П. СУЕТИН

1. Рассмотрим функции вида $f = \hat{\mu} + r$, где $\hat{\mu}(z) = \int_E \frac{d\mu(x)}{z-x}$, μ – положительная мера с носителем $E \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{C}(z)$ – комплексная рациональная функция, голоморфная на E , $r(\infty) = 0$ (f – “рациональное возмущение” $\hat{\mu}$).

Функции $\hat{\mu}$ были введены П. Л. Чебышевым [1] при изучении им формальных разложений лорановских рядов $\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ в непрерывные дроби вида $C(z) := \frac{b_1}{z-a_1} - \frac{b_2}{z-a_2} - \dots$. Знаменатели $Q_n = Q_n(z; \hat{\mu})$ подходящих дробей P_n/Q_n для $C(z)$ оказываются многочленами, ортогональными по мере μ . Для $\hat{\mu}$ теорема Маркова [2] утверждает сходимость последовательности $\{P_n/Q_n\}$ к $\hat{\mu}$ равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, где $[a, b] = \hat{E}$ – выпуклая оболочка E . Тот факт, что в теореме речь идет о сходимости вне $\hat{E}$, а не в дополнении к E , не случаен: если E состоит из нескольких отрезков, то в лакунах между этими отрезками могут располагаться нули полинома Q_n . Дробь P_n/Q_n есть в точности диагональная аппроксимация Паде $[n/n]_{\hat{\mu}}$ функции $\hat{\mu}$ в точке $z = \infty$; при нормировке $Q_n(z) = z^n + \dots$ выполняется соотношение: $R_n(z) := (Q_n \hat{\mu} - P_n)(z) = O(1/z^{n+1})$, $z \rightarrow \infty$. Функция $R_n = R_n(z; \hat{\mu})$ называется функцией *остатка*. Если E состоит из конечного числа отрезков, то в “типичной” ситуации предельные точки нулей последовательности $\{Q_n\}$ – это в точности *вся* отрезок $[a, b]$. С другой стороны, по некоторой *подпоследовательности* Λ нули Q_n не имеют предельных точек в лакунах между отрезками; тем самым, по этой подпоследовательности диагональные аппроксимации Паде $\{[n/n]_{\hat{\mu}}\}_{n \in \Lambda}$ сходятся к $\hat{\mu}$ равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus E$, а не только внутри $\mathbb{C} \setminus \hat{E}$ как в теореме Маркова (см. [3]).

Аналогичный результат о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности диагональных аппроксимаций Паде получен [3] и для $f = \hat{\mu} + r$. В этом случае $Q_n(z; f)$ ортогональны относительно меры $\mu + \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta_{a_j}$, где a_j – полюсы r , $a_j, \lambda_j \in \mathbb{C}$. Последовательность $\{[n/n]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f по (логарифмической) емкости, причем, препятствием к равномерной сходимости всей последовательности $\{[n/n]_f\}$ является “неопределенное” поведение части нулей $Q_n(z; f)$ (полюсов $[n/n]_f$). В терминах гармонических мер отрезков носителя Рахманов [4] получил систему уравнений, описывающих динамику таких нулей в зависимости от n . В случае одной лакуны единственное уравнение задает некоторую кривую γ , соединяющую оба отрезка и расположенную в $\mathbb{C} \setminus E$. Единственный в этом случае нуль $\tilde{z}_n$ полинома $Q_n(z; f)$ с “неопределенным” поведением фактически “блуждает” около этой кривой: все предельные точки последовательности $\{\tilde{z}_n\}$ лежат на γ . В “типичной” ситуации *каждая точка γ – предельная точка последовательности $\{\tilde{z}_n\}$* . Для произвольного числа лакун из уравнений Рахманова не удастся извлечь явного описания динамики блуждающих нулей полиномов $Q_n(z; f)$.

В настоящей заметке приводятся *интегрируемые* дифференциальные уравнения, описывающие динамику таких нулей полиномов $Q_n(z; f)$ в случае произвольного числа лакун.

2. Пусть E состоит из конечного числа отрезков $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g+1$; $h(z) = z^{2g+2} + \dots$ – полином с нулями в точках $\{e_k\}$. Ветвь корня $\sqrt{h(z)}$ выберем так, что $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Пусть мера μ имеет вид $d\mu(x) = \rho(x) dx / i\sqrt{h(x+i0)}$, $x \in E$, где функция $\rho(x) \neq 0$ и удовлетворяет условию Гельдера на E . Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность $\mathfrak{R}$: $w^2 = h(z)$ рода g , которая реализована как двулистное разветвленное накрытие римановой сферы $\mathbb{C}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему E_j^+ и нижнему E_j^- берегам отрезков E_j . Каждой точке $z \neq e_k$ на $\mathbb{C}$ соответствуют две точки $z^{(1)} = (z, \sqrt{h(z)})$ и $z^{(2)} = (z, -\sqrt{h(z)})$ на $\mathfrak{R}$; $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ – два листа поверхности, склеенные по $E^+ \cup E^-$; функция $w = w(z)$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$ или $z^{(2)}$, однозначна

на $\mathfrak{R}$. Определим [5] на $\mathfrak{R}$ базис гомологий, состоящий из a и b -циклов, и соответствующий a -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов dW_k : $\oint_{\mathbf{a}_j} dW_k(\zeta) = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, g$. Матрица $\|B_{kj}\|_{k,j=1,\dots,g}$, $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} dW_k(\zeta)$, является матрицей Римана. Функции $W_k(\mathbf{z}) = \int_{e_{2g+2}}^{\mathbf{z}} dW_k(\zeta)$ определены на $\mathfrak{R}$ однозначно по модулю их a и b -периодов; функции $W'_k(\mathbf{z}) = p_k(z)/w(\mathbf{z})$ однозначны на $\mathfrak{R}$, $p_k \in i\mathbb{R}[z]$. Пусть $\omega_j(z)$ – гармоническая мера отрезка E_j относительно области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ в точке $z \in D$, $j = 1, \dots, g$.

3. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений относительно набора точек $\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, на $\mathfrak{R}$:

$$\dot{z}_j = -2 \frac{w(\mathbf{z}_j)}{\prod_{l \neq j} (z_j - z_l)} \int_{e_{2g+2}}^{\infty} \frac{\prod_{l \neq j} (x - z_l)}{w(x)} dx, \quad j = 1, \dots, g \quad (*)$$

(точка означает производную по t). Пусть Γ_j – траектория, которую описывает на $\mathfrak{R}$ j -я точка $\mathbf{z}_j(t)$. Проекция Γ_j кривой Γ_j на $\mathbb{C}$ – замкнутая кривая, симметричная относительно $\mathbb{R}$. Расположение Γ_j зависит от “начальных” условий $\mathbf{z}_j(0)$; в частности, если все $\mathbf{z}_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, то $\Gamma_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

Уравнения (*) полностью определяют динамику блуждающих нулей полиномов $Q_n(z; f)$ в следующем смысле. Пусть $\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_g(t)$ – решения (*) с некоторыми начальными условиями, Γ_j – соответствующая $\mathbf{z}_j(t)$ траектория. При фиксированном $j \in \{1, \dots, g\}$ рассмотрим последовательность $\{\mathbf{z}_j(n)\} \subset \Gamma_j$, $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1. Если по некоторой подпоследовательности $\Lambda_1 \subset \mathbb{N}$ все $\mathbf{z}_j(n) \in D^{(1)}$, то для $n \in \Lambda_1$ функция остатка R_n имеет блуждающий нуль $\hat{z}_n$, который бесконечно близок к $z_j(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Если по некоторой подпоследовательности $\Lambda_2 \subset \mathbb{N}$ все $\mathbf{z}_j(n) \in D^{(2)}$, то для $n \in \Lambda_2$ полином Q_n имеет блуждающий нуль $\tilde{z}_n$, который бесконечно близок к $z_j(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, задача об асимптотическом поведении блуждающих нулей сводится к изучению свойств решений $\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_g(t)$ системы (*).

ТЕОРЕМА 2. Система (*):

- 1) интегрируется в явном виде с помощью преобразования Абеля; решения системы – условно периодические функции переменной t с периодами $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$;
- 2) эквивалентна системе уравнений Рахманова;
- 3) в пределе при $e_{2g+2} \rightarrow \infty$ переходит в систему уравнений Дубровина (см. [6])

$$\dot{z}_k = \frac{4\sqrt{-h(z_k)}}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)}, \quad k = 1, \dots, g,$$

описывающую динамику нулей конечно-зонных решений уравнения Шрёдингера.

В “типичном” случае множество $(\mathbf{z}_1(n), \dots, \mathbf{z}_g(n))$ всюду плотно на $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_g$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Л. Чебышев // Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 103–126. [2] А. А. Марков // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119. [3] С. П. Суетин // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 81–114. [4] Е. А. Рахманов // Матем. сб. 1977. Т. 104 (146). № 2. С. 271–291. [5] Э. И. Зверович // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113–180. [6] Б. А. Дубровин // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. № 3. С. 41–52.