Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Феликсон, Кокстеровские разбиения сферических симплексов с неразрезанными двугранными углами, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 2, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:59:04

КОКСТЕРОВСКИЕ РАЗБИЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ СИМПЛЕКСОВ С НЕРАЗРЕЗАННЫМИ ДВУГРАННЫМИ УГЛАМИ

А. А. ФЕЛИКСОН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Многогранник в сферическом пространстве S^n называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π .

2. *Кокстеровским разбиением* выпуклого многогранника P называется такое его разбиение на конечное число кокстеровских многогранников, что любые два многогранника разбиения, имеющие общую гипергрань, симметричны друг другу относительно нее.

3. Многогранники разбиения называются *фундаментальными*. Плоскость α , содержащая гипергрань какого-нибудь фундаментального многогранника, называется *зеркалом*, если α не содержит гиперграни многогранника P .

4. Пусть задано кокстеровское разбиение многогранника P . Двугранный угол многогранника P , образованный гипергранями α и β , называется *неразрезанным*, если $\alpha \cap \beta$ не принадлежит ни одному зеркалу.

5. Кокстеровское разбиение называется *неразложимым*, если его фундаментальный многогранник неразложим.

Несложно показать, что любое кокстеровское разбиение симплекса, имеющее разрезанный двугранный угол, либо является в некотором определенном смысле композицией других кокстеровских разбиений, либо может быть получено с помощью алгоритма, описанного в [1]. В данной работе найдены все кокстеровские разбиения сферических симплексов с неразрезанными двугранными углами. Это позволяет закончить классификацию кокстеровских разбиений сферических симплексов, а также важно для описания кокстеровских разбиений гиперболических симплексов с неразрезанными двугранными углами.

Пусть задано кокстеровское разбиение с неразрезанными двугранными углами выпуклого многогранника P в S^n . Тогда P – многогранник Кокстера и, следовательно, симплекс. Фундаментальный многогранник при этом также является симплексом. Несложно доказать следующую лемму:

ЛЕММА 1. Пусть E_1 и E_2 – евклидовы пространства, а $E = E_1 \oplus E_2$. Пусть Γ_i – группа ортогональных преобразований пространства E_i , порожденная отражениями ($i = 1, 2$), $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ и Δ – подгруппа группы Γ , порожденная отражениями. Тогда $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, где Δ_i – подгруппа группы Γ_i , порожденная отражениями ($i = 1, 2$).

Все кокстеровские разбиения сферических симплексов являются прямыми произведениями неразложимых разбиений. Двугранные углы прямого произведения разбиений неразрезаны тогда и только тогда, когда неразрезаны двугранные углы сомножителей.

Будем обозначать через F тип фундаментального многогранника кокстеровского разбиения. Для типов сферических симплексов Кокстера будут использованы стандартные обозначения A_n , B_n , D_n , ...

ТЕОРЕМА 1. Пусть симплекс P допускает неразложимое кокстеровское разбиение с неразрезанными двугранными углами и фундаментальным симплексом F . Тогда пара (F, P) однозначно определяет кокстеровское разбиение. Все возможные такие пары перечислены в таблице:

F	P	F	P
H_3	$3A_1$	E_6	$A_5 + A_1, 3A_2$
F_4	$2A_2$	E_7	$D_6 + A_1, A_5 + A_2, 2A_3 + A_1, A_7, D_4 + 3A_1, 7A_1$
H_4	$A_4, 2G_2^{(5)}, 2A_2,$ $H_3 + A_1, D_4, 4A_1$	E_8	$A_8, A_7 + A_1, A_5 + A_2 + A_1, 2A_4, 4A_2, A_6 + A_2, A_7 + A_1,$ $D_8, D_6 + 2A_1, D_5 + A_3, 2D_4, D_4 + 4A_1, 2A_3 + 2A_1, 8A_1$
		D_n	$D_{m_1} + \dots + D_{m_r} \ (m_1 + \dots + m_r = n),$ $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r > 1, \text{ где } D_2 = 2A_1, D_3 = A_3$

Для случаев, когда $F \neq H_3, H_4, F_4, B_n$, эта классификация непосредственно вытекает из результатов Е. Б. Дынкина [2].

За исключением случаев $F = H_3$ и $F = H_4$, группе Γ_F , порожденной отражениями в гранях симплекса F , отвечает система корней Δ_F . Группа Γ_P , порожденная отражениями в гранях симплекса Кокстера P , является подгруппой в Γ_F . Подгруппе Γ_P отвечает система корней Δ_P , являющаяся подсистемой в Δ_F , если $F \neq B_n, F_4$. В [2] Е. Б. Дынкиным перечислены регулярные полупростые подалгебры алгебр Ли, или, что то же самое, перечислены подсистемы корней в системах корней. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно: 1) среди регулярных подалгебр алгебр A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 выбрать подалгебры полного ранга; 2) найти все кокстеровские разбиения с неразрезанными углами и фундаментальным симплексом типа B_n, F_4, H_3 или H_4 .

ЛЕММА 2. Пусть (F, P) – кокстеровское разбиение с неразрезанными двугранными углами. Тогда для любой вершины v сítěмы Кокстера P существует такая вершина w сítěмы F , что либо $P \setminus v = F \setminus w$, либо симплекс p , соответствующий подсїеме $P \setminus v$, допускает кокстеровское разбиение с неразрезанными углами и фундаментальным симплексом f , соответствующим подсїеме $F \setminus w$.

Лемму несложно доказать, рассмотрев малую сферу с центром в вершине симплекса P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим S^n как сферу единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{n+1}$ с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_{n+1}$. Тогда симплексу F соответствует n -гранный конус. Пусть в случаях B_n и F_4 множество Δ (система корней) состоит из векторов $\pm e_i, \pm e_i \pm e_j$ и $\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ соответственно. В случае $F = H_4$ (H_3) выберем координаты так, чтобы единичными нормальными к граням конуса были векторы $(0, -1, 0, 0), \frac{1}{4}(2, \alpha, \beta, 0), (-1, 0, 0, 0), \frac{1}{4}(2, 0, \alpha, \beta)$, где $\alpha = 1 + \sqrt{5}, \beta = 1 - \sqrt{5}$. Тогда множество Δ нормалей к зеркалам отражений группы, порожденной отражениями относительно граней конуса, – это все векторы, получающиеся четными перестановками координат векторов $(1, 0, 0, 0), \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ и $\frac{1}{4}(2, \pm \alpha, \pm \beta, 0)$. (Случаю H_3 соответствуют те вектора, в которых последняя координата равна нулю.)

Пусть $F = B_n$. Из табл. 9 работы [2] следует, что P содержит прямое слагаемое D_n ($n > 1, D_3 = A_3, D_2 = 2A_1$). Можно считать, что D_n содержит векторы $e_1 \pm e_2$ и, поскольку $e_2 \in M$, P имеет разрезанный двугранный угол.

Пусть $F = F_4, H_3$ или H_4 . Из леммы 2 следует, что если (F, P) не совпадает ни с одним разбиением из условия теоремы 1, то $F = H_4, P = A_2 + G_2^{(5)}, A_3 + A_1, 2A_1 + A_2$ или $2A_1 + G_2^{(5)}$. Таких разбиений нет, поскольку в Δ нет соответствующей четверки векторов. Для каждого из разбиений, перечисленных в условии, несложно найти векторы из Δ , перпендикулярные граням симплекса P . В случае разбиения $(F_4, 2A_2)$ выберем векторы $e_1 - e_2, e_2 - e_3, -\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), e_4$. Легко проверить, что при этом нет разрезанных двугранных углов. Остальные разбиения не могут иметь разрезанных двугранных углов, поскольку симплексы H_3 и H_4 не имеют двугранных углов, равных $\pi/4$.

То, что неразложимое разбиение однозначно определяется парой (F, P) , в случаях $F = E_6, E_7, E_8$ и D_n следует из [1], а в каждом из остальных случаев – из того, что по лемме 2 симплекс P имеет такую вершину v , что грани фундаментальных симплексов, содержащих v , однозначно определены с точностью до симметрии симплекса P .

Автор благодарит Э. Б. Винберга за поддержку и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Felikson // European J. Combin. 1998. V. 19. P. 801–817. [2] Е. Б. Дынкин // Матем. сб. 1952. Т. 30. № 2. С. 349–462.